

dr inż. Lesław Turkiewicz

**„Elementy teorii obwodów”**  
**Materiały do wykładu**

## Spis treści

---

Obwód elektryczny i jego aksjomatyka .....	3
Prąd i napięcie .....	4
Elementy obwodu elektrycznego .....	8
Gałęzie obwodu i jego struktura geometryczna, prawa Kirchhoffa .....	14
Moc .....	18
Tor długi jednorodny z wymuszeniem stałym .....	23
Przykłady analizy obwodów rezystancyjnych ze źródłami sterowanymi .....	26
Elementy geometrii obwodu .....	29
Dwie metody analizy obwodu — motywacja .....	33
Twierdzenie o źródle zastępczym (Thévenina i Nortona) .....	44
Inne zastosowanie twierdzeń .....	50

## Obwód elektryczny i jego aksjomatyka

---

W realnych urządzeniach elektrycznych (ściślej — elektroenergetycznych) dokonują się przemiany energii (jej form i parametrów) → generatory, silniki, urządzenia grzewcze, transformatory itd.

U podstaw działania tych urządzeń tkwią zjawiska opisane **równaniami pola elektromagnetycznego** (z niezbędnymi uproszczeniami).

Modelowanie (reprezentacja) polowych zjawisk energetycznych → zastosowanie „obwodów elektrycznych”.

**Definicja.** *Obwód elektryczny jest modelem realnego układu (urządzenia) elektrycznego (elektromechanicznego), który reprezentuje zjawiska energetyczne układu, z mniejszą lub większą dokładnością.*

Założenia upraszczające: **liniowość** (spełnienie zasady superpozycji), stacjonarność (parametry układu nie zależą od czasu), zaniechanie emisji fal elektromagnetycznych → „obwody SLS”.

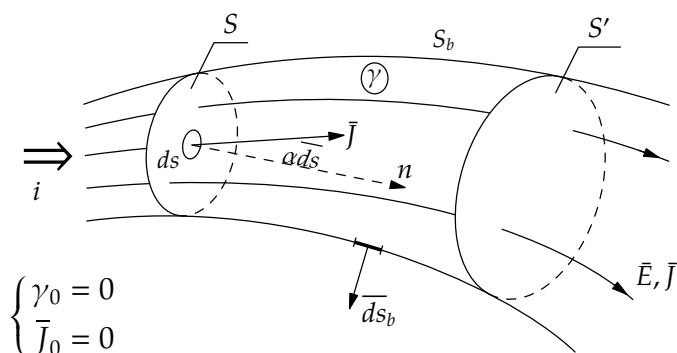
Rozpatruje się również:

- obwody nieliniowe,
- obwody o parametrach „rozłożonych” (przeciwieństwo „skupionych”), na przykład „tor długi”,
- obwody niestacjonarne (na przykład parametry zmieniają się w czasie periodycznie).

Równania obwodów elektrycznych są na ogół prostsze od równań pola, ale mają **motywację polową**.

Niekoniecznie badany (rozwiązywany) obwód musi być modelem istniejącego, realnego układu — analiza teoretyczna bez wymogów aplikacyjnych.

Prąd przewodzenia (środowisko przewodzące), parametr  $\gamma$  [ $\text{Sm}^{-1}$ ]



$\vec{E}$  [ $\text{V/m}$ ] — wektor natężenia pola elektrycznego (podtrzymywanego przez źródło)

$\vec{J}$  [ $\text{A/m}^2$ ] — wektor gęstości prądu

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (\text{lokalne prawo Ohma})$$

$i$  [ $\text{A}$ ]  $\stackrel{\text{df}}{=} \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds}$  ← strumień wektora  $\vec{J}$  przez płat  $S$

$$\vec{J} \cdot \vec{ds} = J \cos \alpha ds$$

$\vec{ds}$  — wzdłuż normalnej  $n$  (do  $S$ ), zwrot określa orientacja  $i$

$S$  — płat na **dowolnej**, niekoniecznie płaskiej powierzchni przekroju poprzecznego (ograniczony brzegiem przewodnika)

$S'$  — inny płat

$S_b$  — powierzchnia brzegu

**Dygresja**

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} = \int_{S'} \vec{J} \cdot \vec{ds}' \quad (\text{oczywiste, dowolność wyboru } S)$$

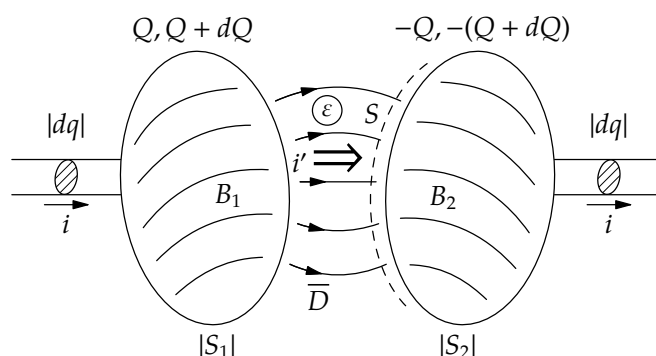
$$\int_{S_b} \vec{J} \cdot \vec{ds}_b = 0$$

$$\int_{S'} \vec{J} \cdot \vec{ds}' + \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} + \int_{S_b} \vec{J} \cdot \vec{ds}_b = \Phi_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{d\sigma} = 0$$

$\Sigma = S' \cup S \cup S_b$  — powierzchnia zamknięta

$\vec{d\sigma}$  — wektorowy element powierzchni  $\Sigma$  (w każdym punkcie — wzdłuż normalnej zewnętrznej do  $\Sigma$ )

**Prąd przesunięcia** (środowisko dielektryczne), parametr  $\varepsilon$  [ $\text{Fm}^{-1}$ ]



$$Q = Q(t) \rightarrow \bar{D} = \bar{D}(t) = \varepsilon \bar{E}(t) \left[ \text{As/m}^2 \right]$$

$\bar{D}$  — wektor indukcji elektrycznej

— układ pojemnościowy ( $B_1$  i  $B_2$  — bryły przewodzące)

— pole elektryczne — zmienne w czasie, lecz quasi-stacjonarne, podtrzymywane przez źródło zmiennego w czasie napięcia.

Przez dowolny przekrój poprzeczny przewodów doprowadzających w elementarnym czasie  $dt$  przepływa elementarny ładunek  $dq \rightarrow$  prąd przewodzenia

$$i = \frac{dq}{dt},$$

przy czym  $dq$  zmienia ładunek **zgromadzony** na  $B_1$  i  $B_2$ :

$$dQ = dq.$$

Prąd przesunięcia (sztuczny)

$$i' \stackrel{\text{df}}{=} \frac{dQ}{dt} = i$$

uzupełnia prąd przewodzenia, płynący **do**  $B_1$  i **od**  $B_2$  (zakładając, że  $dq = dQ > 0$ ).

Ponieważ ładunki  $+Q$  i  $-Q$  rozkładają się odpowiednio na powierzchniach brył  $B_1$  i  $B_2$  z gęstościami  $\sigma_1$  [ $\text{As/m}^2$ ] oraz  $\sigma_2$  ( $\text{sgn } \sigma_2 = -\text{sgn } \sigma_1$ ) oraz zachodzi:

$$\bar{D}_1 = \bar{1}_n \sigma_1 \quad (\text{na } S_1, \bar{1}_n \text{ — wektor jednostkowy wzdłuż normalnej zewnętrznej do } s_1)$$

$$\bar{D}_2 = \text{analogicznie,}$$

otrzymujemy:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{s_1} \tau_1 ds_1 = \frac{d}{dt} \int_{s_1} (\bar{1}_n \tau_1) \cdot (\bar{1}_n ds_1), \quad (\text{przy czym } \bar{1}_n ds_1 = \bar{d}s_1).$$

Ostatecznie,

$$i' = \int_{s_1} \frac{\delta \bar{D}_1}{\delta t} \cdot \bar{ds}_1 = \int_S \bar{J}'_1 \cdot \bar{ds}_1 \quad (\text{oczywiste}),$$

a zatem, na powierzchni bryły  $B_1$  (od strony zewnętrznej) gęstość prądu przesunięcia  $\bar{J}'_1$  [As/m<sup>2</sup>] wynosi  $\frac{\delta \bar{D}_1}{\delta t}$  i analogicznie na powierzchni bryły  $B_2$ .

Ciągłość prądu przesunięcia w całym obszarze dielektryka będzie zapewniona, gdy na dowolnej powierzchni  $S$  (rysunek)

$$\bar{J}' = \frac{\delta \bar{D}}{\delta t}, \quad \text{a więc} \quad i' = \int_S \frac{\delta \bar{D}}{\delta t} \cdot \bar{ds},$$

gdzie  $\bar{ds}$  — wektorowy element powierzchni  $S$ .

### Dygresja

W przypadku nieidealnego środowiska dielektrycznego  $|\epsilon, \gamma|$  wystąpi zarówno prąd przewodzenia jak i przesunięcia, a jego gęstość wypadkowa:

$$\bar{J}_w = \bar{J} + \bar{J}' = \gamma \bar{E} + \epsilon \frac{\delta \bar{E}}{\delta t}.$$

Wypływ pełnego (wypadkowego) prądu przez powierzchnię zamkniętą  $\Sigma$  jest równy zero:

$$\oint_{\Sigma} (\bar{J} + \bar{J}') \cdot \bar{ds} = 0 \quad \text{— warunek ciągłości pełnego prądu,}$$

czyli

$$\oint_{\Sigma} \bar{J} \cdot \bar{ds} = - \oint_{\Sigma} \bar{J}' \cdot \bar{ds} = - \frac{dQ}{dt}$$

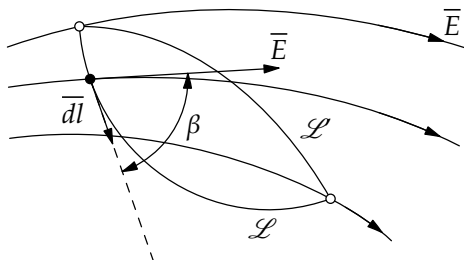
Tym samym

$$dt \oint_{\Sigma} \bar{J} \cdot \bar{ds} = -dQ$$

Oczywistym jest, że wypływ prądu przewodzenia z obszaru ograniczonego powierzchnią  $\Sigma$  może dokonać się jedynie kosztem ubytku  $-dQ$  ładunku zawartego w tym obszarze.

## Napięcie

Wielkość ta dotyczy pary punktów  $A$  i  $B$  w obszarze pola elektrycznego (stacjonarnego lub quasi-stacjonarnego), zarówno w środowisku dielektrycznym jak i przewodzącym.



$$u = u_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} \text{ [V]} = \varphi_a - \varphi_b$$

(całka liniowa wzdłuż dowolnego łuku  $\mathcal{L}$ );  $\varphi_{A,B}$  — potencjały

$$\vec{E} \cdot \vec{dl} = E \cos \beta dl$$

## Dygresja

Ponieważ wybór łuku między  $A$  i  $B$  w polu stacjonarnym (potencjalnym) jest dowolny,

$$u = u'; \quad \int_{A_{\mathcal{L}}}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A_{\mathcal{L}'}}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \longleftrightarrow \quad \oint_{\mathcal{K}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{warunek bezwirowości})$$

gdzie  $\mathcal{K} = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}'$  — pętla (kontur).

## Elementy obwodu elektrycznego

---

W ujęciu graficznym, obwód elektryczny można identyfikować ze zbiorem połączonych ze sobą **elementów** (w najprostszej wersji — dwukońcówkowych), **aktywnych** i **pasywnych**.

W ujęciu ściśle analitycznym, obwód jako „model” można by identyfikować z **układem równań**, opisujących wszystkie powiązania (więzy) wielkości charakteryzujących ten model. Obydwa ujęcia muszą być równoważne, czyli **modelowi graficznemu** można przypisać **model analityczny** i na odwrót.

O ile **jednoznaczność** modelu analitycznego jest bezdyskusyjna, o tyle przyporządkowanie obwodu graficznego układowi równań może być na ogół dokonane na wiele sposobów.

Elementy aktywne to **niezależne** źródła napięcia i prądu (reprezentują urządzenia zasilające), lub **źródła sterowane** (występują z reguły w modelach obiektów elektronicznych).

Elementy pasywne ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) symbolizują odpowiednio:

- rozpraszanie energii, czyli przemianę energii elektrycznej na ciepłą (lub mechaniczną),
- gromadzenie (konserwację) energii w polu magnetycznym układu,
- gromadzenie energii w polu elektrycznym.

Równania definicyjne (a zarazem — funkcjonowanie elementów) stanowią po prostu zależności napięciowo-prądowe  $u(i)$  lub/i prądowo-napięciowe  $i(u)$ , umotywowane opisem adekwatnych zjawisk fizycznych.

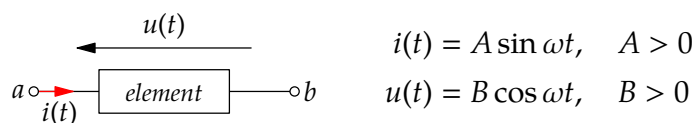
Definicje parametrów  $R$ ,  $L$ ,  $C$  angażują jednak wielkości polowe (na przykład  $\vec{E}$ ,  $\vec{J}$ ) oraz stałe materiałowe ( $\gamma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ ).

Ścisłość opisu elementów wymaga **orientacji** napięć i prądów (względem końcówek). W praktyce stosuje się tak zwane „strzałki zwrotu”, które wskazują albo **hipotetyczny** kierunek ruchu ładunków dodatnich (zwrot prądu), albo końcówkę o **hipotetycznie** wyższym potencjale (zwrot napięcia).

Jeśli badana, „zastrzałkowana” wielkość okaże się dodatnia, to przyjęta a priori strzałka wskazuje zwrot rzeczywisty (i na odwrót).



## Przykład



Prąd (ładunki dodatnie) płynie od „a” do „b” (jak wskazuje strzałka), gdy  $i(t) > 0$ , czyli w przedziałach czasu  $(0, \frac{1}{2}T)$ ,  $(T, \frac{3}{2}T)$  itd., a w pozostałych przedziałach — od „b” do „a”,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

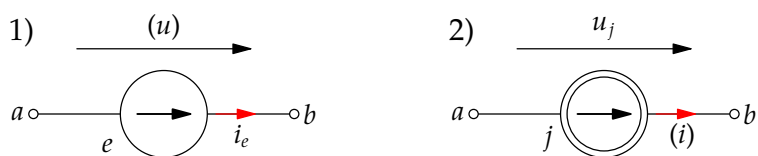
Analogicznie,  $\varphi_a > \varphi_b$  w przedziałach  $(0, \frac{1}{4}T)$ ,  $(\frac{3}{4}T, T)$  itd., w których  $\cos \omega t > 0$ .

Przy okazji zauważmy, że zależność  $u(i)$  musi być:

$$u(t) = \text{const} \frac{di}{dt}, \quad \text{const} > 0.$$

## Źródła niezależne

symbole graficzne:



Źródłom przypisujemy wyjątkowo oznaczenia:

$e[\text{V}]$  — napięcie źródłowe

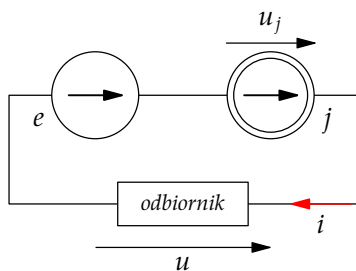
$j[\text{A}]$  — prąd źródłowy (zamiast  $u, i$ ).

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad u(t) = e(t) \quad u \neq f(i_e) \\ 2) \quad i(t) = j(t); \quad i \neq f(u_j) \end{array} \right\} \text{własności definicyjne}$$

Jak widać, istotą definicji jest **negacja** zależności napięcia źródłowego od prądu  $i_e$  źródła oraz zależności prądu źródłowego od napięcia  $u_j$ .

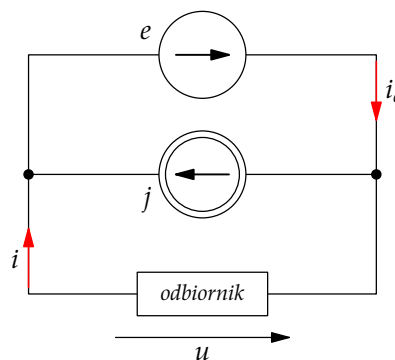
Napięcie źródłowe  $e(t)$  oraz prąd źródłowy  $j(t)$ , są zadanymi a priori funkcjami czasu, w szczególności — stałymi.

## Ilustracje



$$i = j, \quad (i \neq f(e))$$

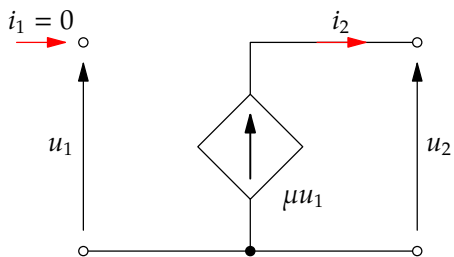
$$u_j = u - e$$



$$u = e, \quad (u \neq f(j))$$

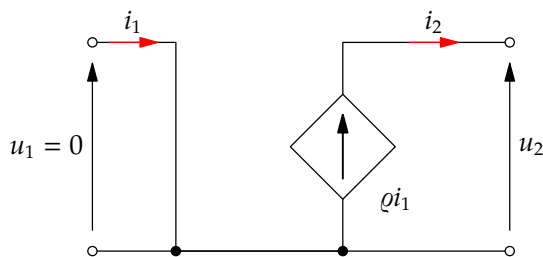
$$i_e = i + j$$

## Źródła sterowane



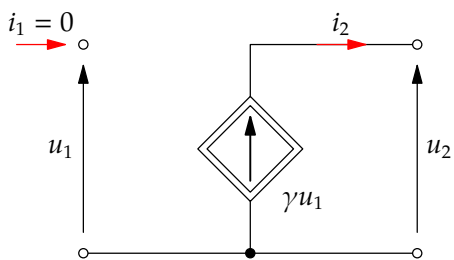
$$u_2 = \mu u_1$$

a) źródło napięcia sterowane napięciowo,  
 $u_1$  — napięcie sterujące



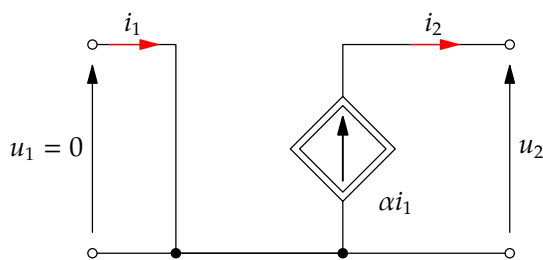
$$u_2 = \rho i_1$$

b) źródło napięcia sterowane prądowo,  
 $i_1$  — prąd sterujący



$$i_2 = \gamma u_1$$

c) źródło prądu sterowane napięciowo,  
 $u_1$  — napięcie sterujące

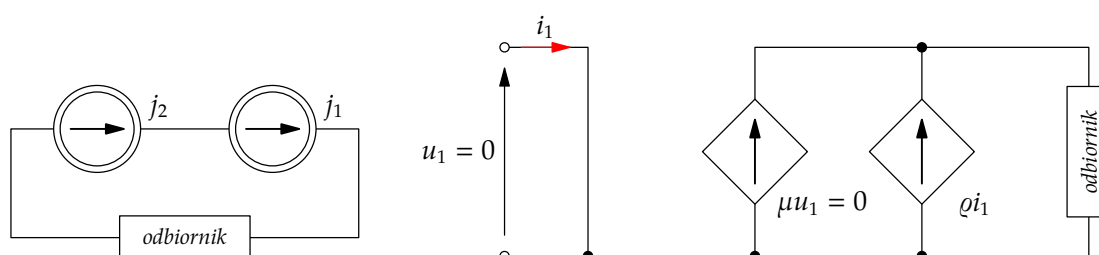


$$i_2 = \alpha i_1$$

d) źródło prądu sterowane prądowo,  
 $i_1$  — prąd sterujący

$\mu, \rho$  [V/V],  $\gamma$  [A/V],  $\alpha$  — stałe, współczynniki sterowania

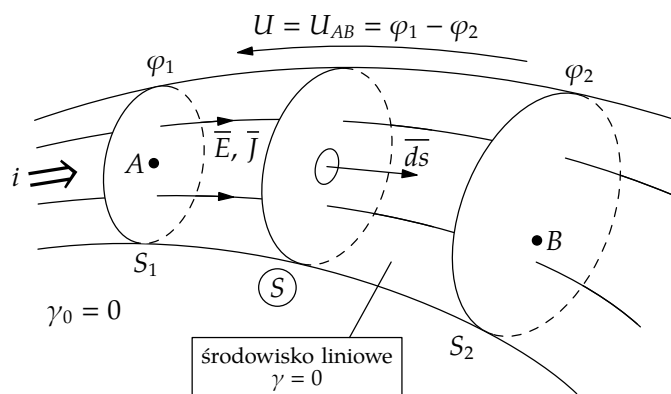
## Przykłady obwodów sprzecznych



## Oporność (przewodność), element R(G)

Parametr zwany opornością dotyczy ograniczonego obszaru środowiska przewodzącego, którego otoczenie stanowi środowisko nieprzewodzące ( $\gamma_0 = 0$ ).

W najprostszym i najbardziej typowym przypadku mówimy o oporności fragmentu przewodnika wiodącego prąd, zawartego między dwoma płacami ekwipotencjalnymi.



$S_1, S_2$  — płaty ekwipotencjalne (powierzchni ekwipotencjalnych) w obszarze przewodnika

$A \in S_1, B \in S_2$

$$\frac{u}{i} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \gamma \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \text{const} \stackrel{\text{df}}{=} R [\Omega], \quad G = \frac{1}{R} [\text{S}]$$

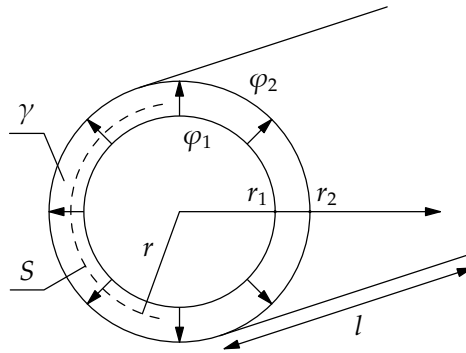
( $u = \text{var.} \longleftrightarrow i = \text{var.}$ )

wybór  $S$  — dowolny (wykazać!)

**Przykład:** oporność słabo przewodzącej izolacji linii współosiowej (kabla)

założenia:  $l \gg r_2$ , przewód wewnętrzny (żyła) oraz powłoka — idealne przewodniki — płaty ekwipotencjalne (powierzchnie walcowe)

$u = \text{const}$



Prąd (od żyły do powłoki),  $i = \int_S \vec{J} ds = \underbrace{2\pi l r}_{S} \cdot J(r)$

$$\vec{E}(r) = \vec{1}_r \frac{J(r)}{\gamma} = \vec{1}_r \frac{i}{2\pi l \gamma r}, \quad \vec{1}_r \text{ — wektor jednostkowy}$$

Przyjmujemy dla prostoty:  $d\vec{l} = \vec{1}_r dr$ , a zatem

$$u = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}(r) \cdot \vec{1}_r dr = \frac{i}{2\pi l \gamma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{i}{2\pi l \gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

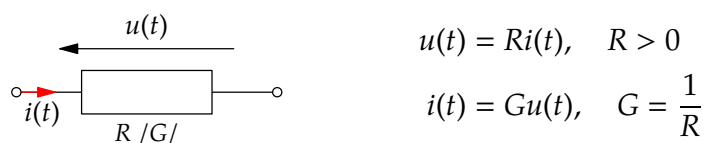
$$(\vec{1}_r \cdot \vec{1}_r = 1)$$

Ostatecznie

$$R_{iz} = \frac{u}{i} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi l \gamma} = \text{const}$$

(Gdy  $r_1 \rightarrow r_2$ , to  $R_{iz} \rightarrow \infty$ ; gdy  $l \nearrow$ ,  $R_{iz} \searrow$ )

element  $R$



$$u(t) = Ri(t), \quad R > 0$$

$$i(t) = Gu(t), \quad G = \frac{1}{R}$$

$i > 0 \leftrightarrow u > 0$  (prąd płynie od płyta o wyższym potencjale do płyta o niższym potencjale)

## Uwaga

Element  $R$  może być zastosowany w modelu graficznym (obwodzie) nie tylko jako reprezentant oporności konkretnego obiektu dwukońcówkowego (rezystora, uzwojenia itp.), ale również w symbolicznym charakterze. Przykładowo, tak zwany schemat zastępczy transformatora (obwód elektryczny) zawiera element  $R_{Fe}$ , który symbolizuje tak zwane straty w rdzeniu ferromagnetycznym, czyli zjawisko rozpraszania energii, jeśli transformator jest zasilany napięciem sinusoidalnie zmiennym.

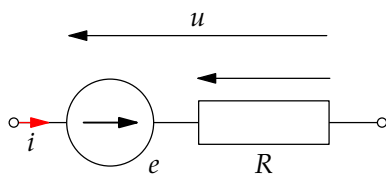
Również obciążenie (mechaniczne) silnika indukcyjnego reprezentuje w schemacie zastępczym element  $R$ , zależny od poślizgu, a tym samym od prędkości obrotowej.

## Gałęzie obwodu i jego struktura geometryczna, prawa Kirchhoffa

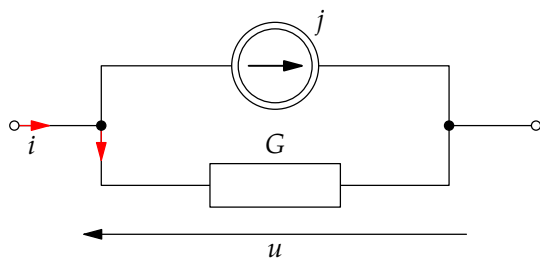
W obwodzie elektrycznym można wyodrębnić nie tylko pojedyncze elementy, ale również pewne zbiory elementów, zwane **gałęziami**, połączonymi ze sobą w punktach zwanych **węzłami**.

Jeśli dla pewnego dwukońcówkowego zbioru elementów znana jest zależność  $u(i)$  lub  $i(u)$ , to zbiór ten można potraktować jako gałąź (w szczególności — pojedynczy element pasywny lub aktywny).

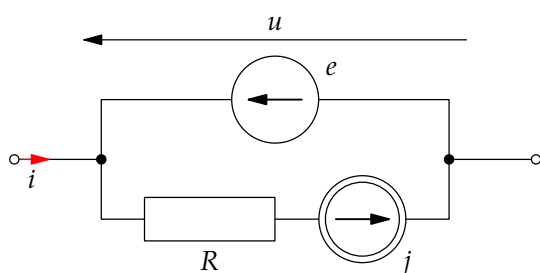
### Przykłady



$$a) u = -e + Ri, \quad (i = G(u + e))$$



$$b) i = j + Gu, \quad (u = R(i - j))$$



$$c) u = e, \quad u \neq f(i)$$

Strukturę geometryczną obwodu reprezentuje tak zwany graf obwodu  $/G/$ , w którym każdą gałąź symbolizuje odcinek (łuk).

**Konturem**  $/K/$  nazywamy zbiór gałęzi obwodu (lub podgraf jego grafu), który tworzy zamkniętą drogę, z zastrzeżeniem, że każdy węzeł wzdłuż niej należy do dwu gałęzi (węzły drugiego rzędu)

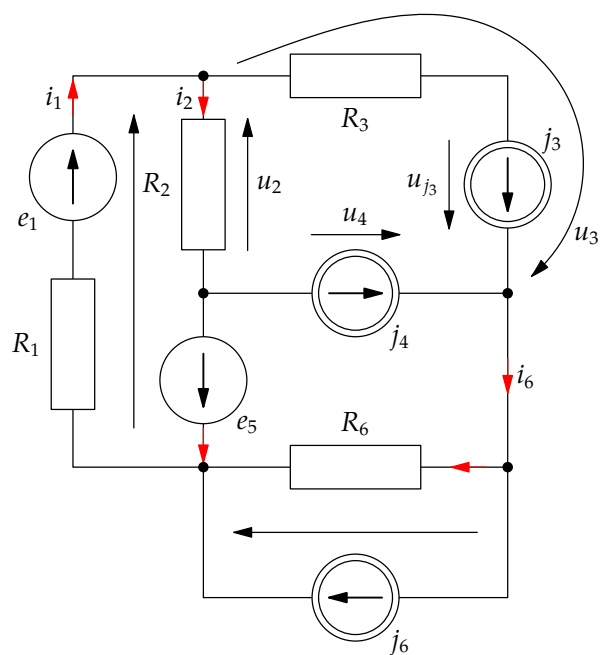
Przykładowo:

$$K_1 = \{1, 3, 6\}, \quad K_2 = \{5, 4, 6\}, \quad K_3 = \{1, 2, 4, 6\}$$

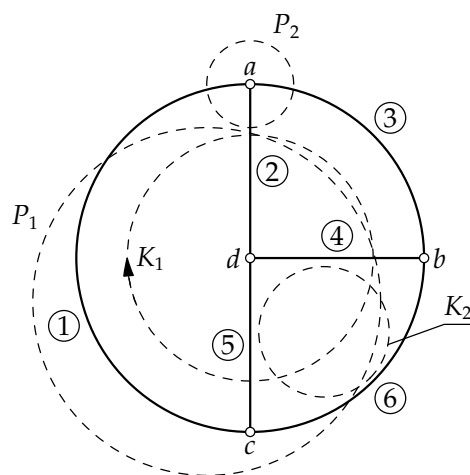
Jak widać, w każdym z tych trzech konturów występuje gałąź (własna), która do pozostałych nie należy: 3, 5, 2 odpowiednio.

Jest to z pewnością warunek wystarczający, by zbiór konturów  $K_1, K_2, K_3$  można uznać za **niezależny**.

## Uwaga



rys. 1



rys. 2

Zbiór  $\{1, 2, 4, 6, 5\}$  nie jest konturem, gdyż węzeł  $c$  w tym podgrafie jest węzłem trzeciego rzędu.

Pęciem  $/P/$  nazywamy **minimalny** zbiór gałęzi (podgraf), który ma tę własność, że ich **odcięcie** wytwarza dwa rozłączne podgrafy  $G_1$  i  $G_2$ :  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ,  $(G_1 \cup G_2) \cup P = G$ .

Pęk nazywamy **węzłowym**, jeśli zbiór  $G_1$  lub zbiór  $G_2$  jest zbiorem pustym ( $G_1 = \emptyset$  lub  $G_2 = \emptyset$ ).

Pęk można wyznaczyć przecinając jednokrotnie niektóre gałęzie obwodu (grafu) krzywą zamkniętą (pętlą) — na rysunku linia przerywana zielonego koloru.

Przykładowo:

$$P_1 = \{1, 2, 4, 6\}; \quad (G_1 = \{5\}, \quad G_2 = \{3\})$$

$$P_2 = \{1, 2, 3\}; \quad (G_1 = \emptyset, \quad G_2 = \{6, 5, 4\})$$

## Uwaga

Zbiór  $\{1, 2, 3, 4\}$  **nie** jest pękiem, bo nie jest **minimalny**. Napięciowe prawo Kirchhoffa /NPK/ odnosi się do dowolnego konturu.

Prądowe prawo Kirchhoffa /PPK/ dotyczy dowolnego pęku. Sformułowanie PPK i NPK wymaga **orientacji** gałęzi. Należy również zorientować kontury (przyjąć kierunki obiegu drogi zamkniętej) oraz pęki — strzałki skierowane na zewnątrz lub do wnętrza obszarów ograniczonych pętlami.

Przyjmując  $k, v, \mu$  jako odpowiednio wskaźniki gałęzi, pęków i konturów,  $k = 1, 2, \dots, g$  (liczba gałęzi obwodu), prawa Kirchhoffa można zapisać w postaci:

$$\text{PPK (dla } P_v): \sum_{k=1}^g \alpha_{vk} \quad i_k = 0, \alpha_{vk} = \pm 1 \text{ lub } 0$$

$$\text{NPK (dla } K_\mu): \sum_{k=1}^g \beta_{\mu k} \quad u_k = 0, \beta_{\mu k} = \pm 1 \text{ lub } 0$$

$\alpha_{vk} \neq 0$  gdy gałąź  $k \in P_v$ , w przeciwnym razie — zero

$\beta_{\mu k} \neq 0$  gdy gałąź  $k \in K_\mu$ , w przeciwnym razie — zero

Znaki współczynników kombinacji liniowych zależą oczywiście od orientacji gałęzi względem orientacji pęków i konturów, do których te gałęzie należą.

Mnożąc dowolne równanie przez  $-1$  zmieniamy znaki wszystkich współczynników kombinacji, co jest równoważne zmianie orientacji pęku lub konturu.

Przykładowo, dla zbioru gałęzi  $\{1, 2, 4, 6\}$ , który jest zarazem pękiem i konturem, przy zaznaczonej na rys. 1 orientacji pęku  $P_1$  i dla prawoskrętnego obiegu konturu zachodzi:

$$\text{NPK: } u_1 - u_2 + u_4 + u_6 = 0$$

$$\text{PPK: } i_1 - i_2 + j_4 - i_6 = 0$$

### Uwaga

Specyfika rozpatrywanego obwodu umożliwia jego rozwiązanie (obliczenie nieznanych prądów lub/i napięć gałęziowych na podstawie następujących, prostych równań:

$$i_6 = j_3 + j_4$$

$$\left. \begin{array}{l} i_1 = i_2 + j_3 \\ u_1 - u_2 + e_5 \end{array} \right\} e_1 - R_1(i_2 + j_3) - R_2 i_2 + e_5 = 0 \quad / \text{NPK dla } \{1, 2, 5\} /$$

$$i_2 = \frac{e_1 + e_5 - R_1 j_3}{R_1 + R_2}, \quad i_1 = \frac{e_1 + e_5 + R_2 j_3}{R_1 + R_2}$$

$$i_5 = i_2 + j_4$$

$$i_{R_6} = i_6 - j_6 = j_3 + j_4 - j_6$$

Ponadto:

$$u_6 = R_6 i_{R_6} = R_6(j_3 + j_4 - j_6)$$

$$u_4 = e_5 - u_6 = e_5 + R_6(j_6 - j_3 - j_4)$$

$$u_{j_3} = u_3 - R_3 j_3 = u_4 - R_2 i_2 = u_4 - R_2 i_2$$

$$u_{j_3} = e_5 + R_6(j_2 - j_3 - j_4) - \frac{R_2(e_1 + e_5 - R_1 j_3)}{R_1 + R_2}$$



## Komentarz

Pomijając szczegóły wywodów można stwierdzić, że prawa Kirchhoffa mają naturalną motywację polową, przynajmniej dla obwodów rezystancyjnych (elementy  $R$  i źródła): PPK wynika z warunku ciągłości prądu,

$$\oint_{\Sigma} \bar{J} \cdot \bar{d\sigma} = 0,$$

NPK — z warunku bezwirowości,

$$\oint_K \bar{E} \cdot \bar{dl} = 0.$$

Można wykazać, że maksymalna liczba **niezależnych** równań PPK wynosi  $d = w - 1$ , maksymalna liczba niezależnych równań NPK wynosi  $a = g - d = g - w + 1$ , gdzie  $w$  — liczba węzłów rozpatrywanego obwodu.

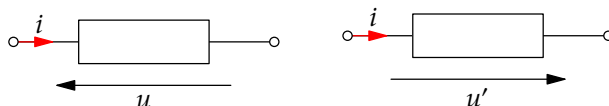
W powyższym przykładzie:  $g = 6$ ,  $w = 4 \rightarrow d = 3$ ,  $a = 3$  (trzy niezależne pęki i trzy niezależne kontury).

Moc, czyli szybkość zmian energii jest wielkością przypisaną dowolnemu elementowi, lub dowolnej gałęzi obwodu elektrycznego:

$$p_k(t) = \frac{dw_k}{dt} = u_k(t)i_k(t) \text{ [W]} = \begin{cases} u_k(i_k) \cdot i_k \\ u_k \cdot i_k(u_k) \end{cases}$$

Wielkość tak określona może być zarówno:

- mocą energii pobieranej przez gałąź (mocą pobieraną), gdy zwroty napięcia i prądu są przeciwne („orientacja odbiornikowa”), jak i
- mocą energii oddawanej (mocą oddawaną), gdy zwroty są zgodne („orientacja nadajnikowa”).

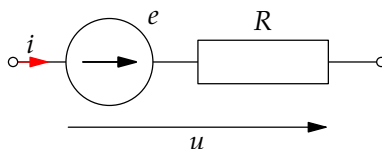


$$p = p_{pob} = u(t)i(t)$$

$$p' = p_{odd} = u'(t)i(t)$$

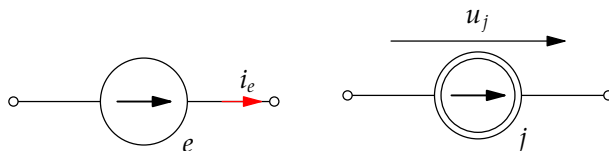
$$p'(t) = -p(t)$$

$$p_{odd} = ui = (e - Ri)i = ei - Ri^2 = -p_{pob}, \quad p_{pob} = Ri^2 - ei$$

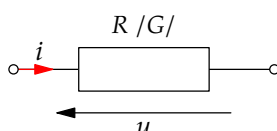


Źródłom napięcia i prądu przypisujemy zazwyczaj moce oddawane;

$$p_e = ei_e, \quad p_j = u_j j$$



Elementom pasywnym przypisujemy moce pobierane, dla R:



$$p_R = ui = Ri^2 = Gu^2 = p_{pob}$$

$p_R(t) \geq 0$  — rozpraszanie energii

### Uwaga

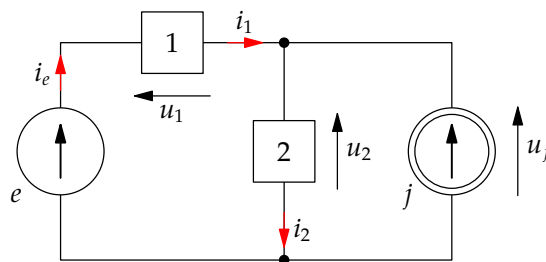
Jeśli obwód zawiera więcej niż jedno źródło, każda z mocy może być dodatnia lub ujemna (interpretacja oczywista).

**Twierdzenie.** Można wykazać, że suma mocy oddawanej przez źródła jest równa sumie mocy pobieranych przez elementy pasywne.

### Dowód

Dowód opiera się wyłącznie na prawach Kirchhoffa, czyli zależności  $u_k(i_k)$  lub  $i_k(u_k)$  mogą być dowolne (na przykład nieliniowe).

### Przykład



$$\begin{aligned}
 \text{(oddawane)} \quad p_e + p_j &= e i_e + u_j j = \\
 &= e i_1 + u_2 (i_2 - i_1) = \\
 &= (u_2 + u_1) i_1 + u_2 i_2 - u_2 i_1 = \\
 &= u_1 i_1 + u_2 i_2 = p_1 + p_2 \quad \text{(pobierane)}
 \end{aligned}$$

Energia (oddawana lub pobierana):

■ w przedziale czasu  $(t_1, t_2)$ ,  $t_2 > t_1$

$$\Delta W = \begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} e(t) i_e(t) dt \quad \text{lub} \quad \int_{t_1}^{t_2} u_j(t) j(t) dt \\ \int_{t_1}^{t_2} u(t) i(t) dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = G \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \quad /R/ \end{cases}$$

jak widać,  $\Delta W_R > 0$ .

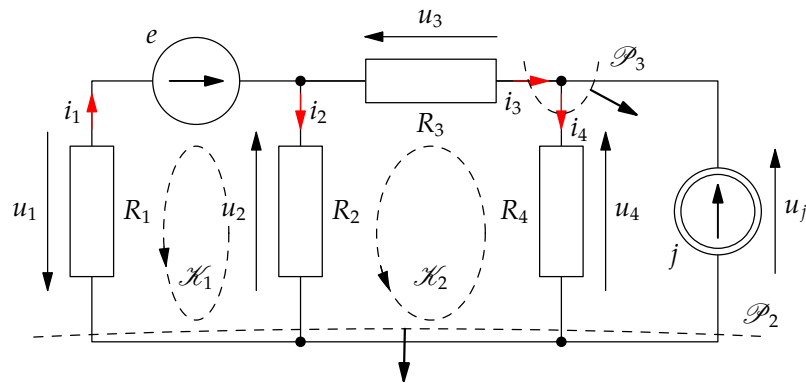
■ w przedziale czasu  $(0, t)$ ,  $t > 0$

$$W_R(0, t) = R \int_0^t i^2(\tau) d\tau = G \int_0^t u^2(\tau) d\tau \quad \text{funkcja rosn\u0105ca, bo jej pochodna (moc) > 0}$$

Niech  $i(t) = 2e^{-t} - 4$  ( $< 0$ )

$$\begin{aligned} W_R(0, t) &= R \int_0^t (2e^{-\tau} - 4)^2 d\tau = R \int_0^t (4e^{-2\tau} - 16e^{-\tau} + 16) d\tau = \dots \\ &= R(16t - 18 + 2e^{-2t} + 16e^{-t}) \rightarrow 16t - 18, \quad W_R(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

**Przyk\u0142ad:** analiza obwodu rezystancyjnego



Wed\u0142ug PPK i NPK u\u0142o\u017amy niezb\u0119dne r\u00f3wnania, obliczymy niekt\u00f3re pr\u0105dy ga\u0142\u0119ziowe oraz moce oddawane przez \u017br\u00f3d\u0142a.

**A.** Poniewa\u017c  $d = w - 1 = 3 - 1 = 2$ , mo\u017cemy u\u0142o\u017cy\u0107 tylko dwa niezale\u017ane r\u00f3wnania PPK (dla  $P_2$  i  $P_3$ ), przy czym jeden z pi\u0119ciu pr\u0105d\u00f3w ga\u0142\u0119ziowych ( $g = 5$ ) jest dany ( $j$ )

$$\begin{aligned} P_2: \quad i_2 + i_4 - i_1 - j &= 0 \rightarrow i_2 = i_1 - i_4 + j \\ P_3: \quad i_4 - i_3 - j &= 0 \rightarrow i_3 = i_4 - j \end{aligned} \quad (1)$$

Z kolei, u\u0142adamy dwa r\u00f3wnania NPK (dla  $K_1$  i  $K_3$ ), z zastosowaniem zale\u017cnosci  $u(i)$  oraz uwzgl\u0119dniaj\u0105c zwi\u0105zki (1). Niewiadomymi w r\u00f3wnaniach NPK b\u0119d\u0105 wi\u0119c pr\u0105dy ga\u0142\u0119ziowe  $i_1, i_4$ :

$$\begin{aligned} K_1: \quad R_1 i_1 + R_2 (i_1 - i_4 + j) - e &= 0 \\ K_3: \quad R_3 (i_4 - j) + R_4 i_4 - R_2 (i_1 - i_4 + j) &= 0 \end{aligned}$$

Przyjmujemy parametry:  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 6\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ ,  $R_4 = 8\Omega$  i po uporz\u0105dkowaniu otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} 9i_1 - 6i_4 &= e - 6j \\ -6i_1 + 18i_4 &= 10j \end{aligned} \right\}$$

Rozwiązanie równań (w postaci macierzowej):

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 18 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e - 6j \\ 10j \end{bmatrix} = \frac{1}{1,62 - 3,6} \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e - 6j \\ 10j \end{bmatrix}$$

Ostatecznie:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7}e - \frac{8}{21}j \\ \frac{1}{21}e + \frac{3}{7}j \end{bmatrix}$$

$$i_e = i_1, \quad u_j = u_4 = R_4 i_4 = \frac{40}{7}j + \frac{8}{21}e$$

Przyjmując  $e = 42V$ ,  $j = 7A$  mamy:

$$i_e = \frac{42}{7} - 7 \cdot \frac{8}{21} = \frac{10}{3} [A]$$

$$u_4 = u_j = \frac{8}{21} \cdot 42 + 7 \cdot \frac{24}{7} = 40 [V]$$

Moce oddawane przez źródła wynoszą:

$$p_e = e i_e = 42 \cdot \frac{10}{3} = 140 [W]$$

$$p_j = u_j j = 40 \cdot 7 = 280 [W]$$

### Uwaga

Łatwo zauważyć, że wielkości  $i_e$  oraz  $u_j$  są **kombinacjami liniowymi** wymuszeń  $e$  oraz  $j$  o współczynnikach:  $G_{ab}$ ,  $H$  oraz  $R_{cd}$ ,  $H'$ :

$$i_e = G_{ab}e + Hj; \quad G_{ab} = \frac{1}{7}S, \quad H = -\frac{8}{21} [A/V]$$

$$u_j = R_{cd}j + H'e; \quad R_{cd} = \frac{24}{7}\Omega, \quad H' = \frac{8}{21} [V/V] = -H(!)$$

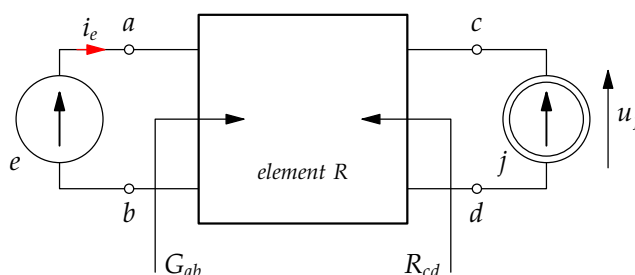
gdzie:

$G_{ab}$  — konduktancja zastępcza od strony końcówek  $a$ ,  $b$  po upasywnieniu obwodu ( $j \rightarrow$  przerwa)

$R_{cd}$  — rezystancja zastępcza od strony końcówek  $c$ ,  $d$  po upasywnieniu obwodu ( $e \rightarrow$  zwarcie)

$H$  i  $H'$  — transmitancje (prąd/prąd i napięcie/napięcie)

Ilustracja



$$i_e = i_e^{(e)} + i_e^{(j)}$$

$$u_j = u_j^{(j)} + u_j^{(e)}$$

$$p_e = e i_e^{(e)} + e i_e^{(j)} = G_{ab} e^2 + e i_e^{(j)}$$

$$p_j = j u_j^{(j)} + j u_j^{(e)} = R_{bc} j^2 + j u_j^{(e)}$$

### Twierdzenie

$$e i_e^{(j)} + j u_j^{(e)} = 0$$

**B.** Alternatywnie, jako niewiadome można przyjąć napięcia gałęziowe  $u_1 \div u_4$ , wykorzystując dwa niezależne równania NPK ( $a = g - w + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$ ):

$$K_1 : u_1 + u_2 - e = 0 \rightarrow u_1 = e - u_2$$

$$K_2 : u_2 - u_3 - u_4 = 0 \rightarrow u_4 = u_2 - u_3$$

W równaniach PPK (dla pętków  $P_2$  i  $P_3$ ) zapisujemy prądy gałęziowe, wyrażone od razu w funkcji napięć  $u_2$  i  $u_3$ :

$$P_2 : -G_1(e - u_2) + G_2 u_2 + G_4(u_2 - u_3) - j = 0$$

$$P_3 : G_4(u_2 - u_3) - G_3 u_3 - j = 0 \quad \cdot / -1/; \quad G_k = \frac{1}{R_k}$$

Po uporządkowaniu i zmianie znaków w drugim równaniu otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j + G_1 e \\ -j \end{bmatrix}$$

$$G_1 + G_2 + G_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} S, \quad G_3 + G_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} S, \quad j + G_1 e = 7 + \frac{42}{3} = 21 A$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{\Delta=14}^{-1} \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \end{bmatrix} = \frac{8}{14} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 32 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Dla porównania rezultatów w punktach A i B obliczymy napięcia  $u_2$  i  $u_3$  mając dane prądy:  $i_1 = \frac{10}{3} A$ ,  $i_4 = 5 A$  (pkt. A):

$$u_2 = e - R_1 i_1 = 42 - 10 = 32 [V]$$

$$u_3 = R_3 i_3 = R_3 \left( i_1 - \frac{u_2}{R_2} \right) = 4 \left( \frac{10}{5} - \frac{32}{6} \right) = -8 [V]$$

## Tor długi jednorodny z wymuszeniem stałym

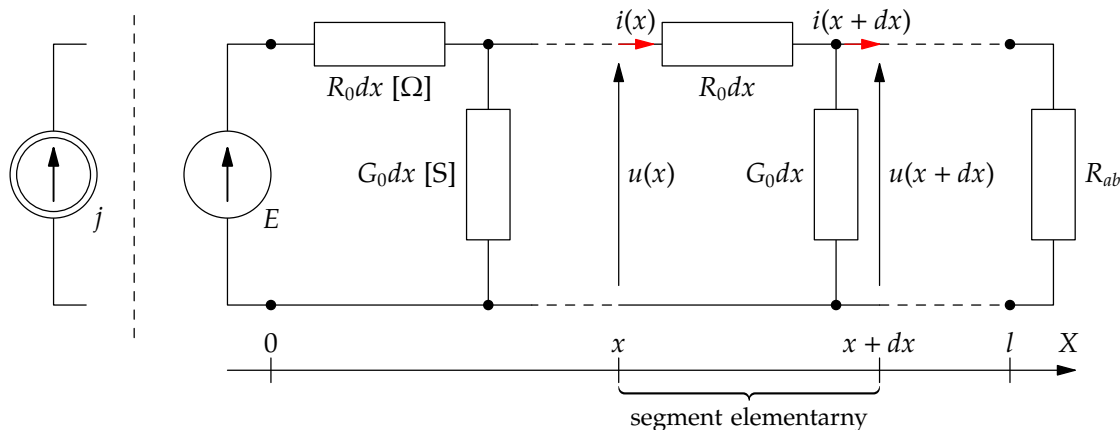
Dotychczas rozpatrywano tylko obwody rezystancyjne z parametrami **skupionymi**.

Obecnie — najprostszy przykład obwodu z parametrami **rozłożonymi**. W jego opisie pojawia się jedna zmienna, określająca położenie ( $x$ ), a zatem:  $i = i(x)$ ,  $u = u(x)$ .

Niezależność wymuszenia od czasu (napięcie źródłowe  $\varepsilon [V] = \text{const}$  lub prąd źródłowy  $j = \text{const}$ ) skutkuje tym, że również odpowiedź  $i = i(x)$  oraz  $u = u(x)$  nie jest funkcją czasu.

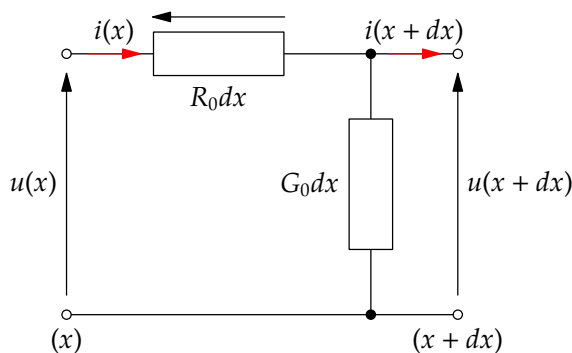
W rzeczywistości, w modelach toru długiego **muszą** wystąpić zarówno jednostkowe parametry rezystancyjne:  $R_0 [Ω/m]$  i  $G_0 [S/m]$ , jak również parametr indukcyjny  $L_0 [H/m]$  i pojemnościowy  $C_0 [F/m]$ , jednak w przypadku wymuszenia stałego w **stanie ustalonym** nie odgrywają one żadnej roli.

Można je wyeliminować z modelu, pozostaje więc:



$R_0 dx$  — elementarna oporność „wzdłużna” (dot. obydwu przewodników linii 2-przewodowej)

$G_0 dx$  — elementarna przewodność „poprzeczna” (dotyczy niedoskonałej izolacji między przewodami)



$$\left. \begin{array}{l} \text{NPK: } u(x) - u(x + dx) = (R_0 dx) i(x) \\ \text{PPK: } i(x) - i(x + dx) = \underbrace{(G_0 dx) u(x + dx)}_{\cong u(x)} \end{array} \right| : dx$$

$$\begin{array}{l} -\frac{du}{dx} = R_0 i \quad \left| \frac{d}{dx} \right. \\ -\frac{di}{dx} = G_0 u \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{d^2 u}{dx^2} = R_0 \frac{di}{dx} = -R_0 G_0 u \\ \sqrt{R_0 G_0} \stackrel{\text{df}}{=} p \text{ [m}^{-1}\text{]} \\ \frac{d^2 u}{dx^2} - p^2 u = 0 \end{array}$$

Analogicznie, na skutek symetrii równań:

$$\frac{d^2 i}{dx^2} - p^2 i = 0$$

Równanie charakterystyczne w obydwu przypadkach:

$$\lambda^2 - p^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm p = \pm \sqrt{R_0 G_0}, \quad \text{a zatem}$$

$$\begin{array}{l} u(x) = B_1 e^{-px} + B_2 e^{px} \\ i(x) = A_1 e^{-px} + A_2 e^{px} = -\frac{1}{R_0} \frac{d}{dx} [B_1 e^{-px} + B_2 e^{px}] \end{array}$$

Oznaczając  $\frac{p}{R_0} = \sqrt{\frac{G_0}{R_0}} = \frac{1}{\rho}$ ,  $\rho = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} \text{ [}\Omega\text{]}$

otrzymujemy  $i(x) = \frac{B_1}{\rho} e^{-px} - \frac{B_2}{\rho} e^{px}$

Stałe  $B_1$  i  $B_2$  wynikają z warunków brzegowych (na początku linii i na jej końcu, czyli dla  $x = 0$  oraz  $x = l$ ). W szczególności dla linii zwartej ( $u(l) = 0 \equiv R_{ab} = 0$ ):

$$\begin{array}{l} |x = 0| \quad B_1 + B_2 = u(0) = E \\ |x = l| \quad B_1 e^{-pl} + B_2 e^{pl} = u(l) = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-pl} & e^{pl} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{e^{pl} - e^{-pl}} \begin{bmatrix} e^{pl} \\ -e^{-pl} \end{bmatrix}$$



A zatem, prąd na początku linii zwartej ( $x = 0$ ):

$$i(0) = \frac{1}{\rho}(B_1 - B_2) = \frac{E e^{pl} + e^{-pl}}{\rho e^{pl} - e^{-pl}} = \frac{E \operatorname{ch} pl}{\rho \operatorname{sh} pl}$$

Jak widać, oporność wejściowa linii zwartej wynosi

$$R_z = \frac{u(0)}{i(0)} = \frac{E}{i(0)} = \rho \operatorname{th} pl = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} \operatorname{th}(\sqrt{R_0 G_0} l)$$

Podobnie, można pokazać, że oporność wejściowa linii nieobciążonej ( $i(l) = 0 \equiv R_{ob} = \infty$ ) wynosi:

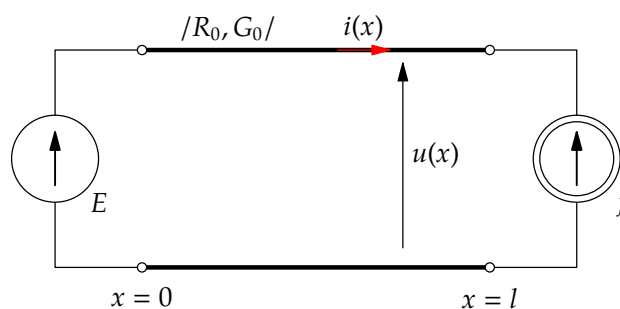
$$R_o = \frac{\rho}{\operatorname{th} pl} \quad (\rightarrow \infty \quad \text{gdy} \quad l \rightarrow 0)$$

W ogólnym przypadku (linia obciążona) stałe  $B_1$  i  $B_2$  spełniają warunki:

$$\begin{aligned} u(0) = E &\rightarrow B_1 + B_2 = E \\ u(l) = R_{ob} i(l) &\rightarrow B_1 e^{-pl} + B_2 e^{+pl} = R_{ob} \cdot \frac{1}{\rho} (B_1 e^{-pl} - B_2 e^{pl}) \end{aligned}$$

Po obliczeniu  $B_1$  i  $B_2$  otrzymujemy zależności  $u(x)$  oraz  $i(x)$ , a także oporność wejściową linii obciążonej.

**Problem** (praca kontrolna)



Rozkłady napięcia  $u(x)$  oraz prądu  $i(x)$  wzdłuż toru opisują takie same równania, stałe  $B_1$  i  $B_2$  liczymy na podstawie warunków brzegowych:

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= B_1 + B_2 = E \\ i(l) &= \frac{B_1}{\rho} e^{-pl} - \frac{B_2}{\rho} e^{pl} = -j \end{aligned} \right\}$$

**Temat:** Na podstawie rozkładów  $u(x)$ ,  $i(x)$  zbadać moc rozpraszaną w linii oraz moce oddawane przez źródła  $E$  i  $j$ .

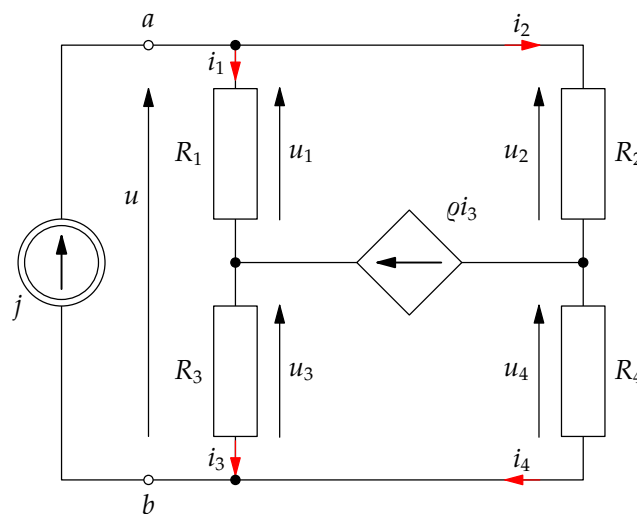
## Przykłady analizy obwodów rezystancyjnych ze źródłami sterowanymi

Do zbioru niewiadomych należy zakwalifikować wielkości **sterujące** (prądy lub/i napięcia). Układamy niezbędne równania PPK i NPK, a po ich rozwiązaniu liczymy pożądaną odpowiedź obwodu.

### Uwaga

Aby rozwiązanie było niezerowe, obwód musi zawierać co najmniej jedno źródło **niezależne**.

### Przykład 1.



$$R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$$

$$R_4 = 4\Omega$$

$\rho, j$  — dane

$$\rho \neq 6V/A$$

Obliczyć  $u$

**PPK:**

$$i_2 = j - i_1; \quad i_4 = j - i_3$$

**NPK:**

$$R_1 i_1 - R_2 (j - i_1) + \rho i_3 = 0 \rightarrow i_1 = \frac{R_2 j - \rho i_3}{R_1 + R_2}$$

$$R_3 i_3 - \rho i_3 - R_4 (j - i_3) = 0 \rightarrow i_3 = \frac{R_4 j}{R_3 + R_4 - \rho} = \frac{4}{6 - \rho} j$$

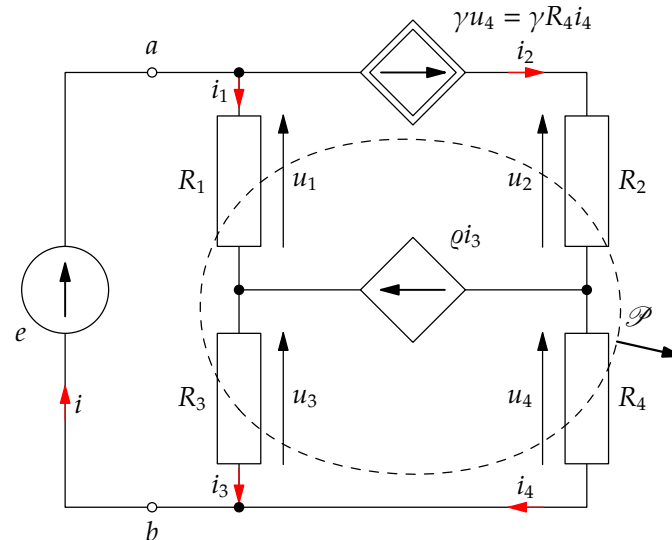
$$i_1 = \frac{12 - 6\rho}{24 - 4\rho} j = \frac{6 - 3\rho}{12 - 2\rho} j$$

$$u = R_1 i_1 + R_3 i_3 = \left( \frac{6-3\rho}{6-\rho} + \frac{8}{6-\rho} \right) j = \frac{14-3\rho}{6-\rho} j = R_{ab} j$$

$$R_{ab} = \frac{3\rho-14}{\rho-6}$$

Jak widać,  $R_{ab} < 0$  dla  $\rho \in \left( \frac{14}{3}, 6 \right) \text{V/A}$ .

### Przykład 2.



$$R_1 = R_2 = R_3 = 2\Omega$$

$$R_4 = 4\Omega$$

$e, \rho, \gamma$  — dane

**NPK:**

$$R_4 i_4 + \rho i_3 - R_3 i_3 = 0 \rightarrow i_3 = \frac{R_4}{R_3 - \rho} i_4$$

$$R_4 i_4 + \rho i_3 + R_1 i_1 = e$$

**PPK** (bilans prądów pęku  $P$ ):

$$i_3 + i_4 - i_1 - \gamma R_4 i_4 = 0$$

Po prostych przekształceniach mamy:

$$i_1 = i_3 + (1 - \gamma R_4) i_4 = \left( \frac{R_4}{R_3 - \rho} + 1 - \gamma R_4 \right) i_4$$

$$\left( R_4 + \frac{\rho R_4}{R_3 - \rho} + \frac{R_1 R_4}{R_3 - \rho} + R_1 - \gamma R_4 R_1 \right) i_4 = e$$

Jak widać, parametr  $R_2$  nie wpływa na wynik,  $i_4 \neq f(R_2)$

$$\left(4 + \frac{4\rho}{2-\rho} + \frac{8}{2-\rho} + 2 - 8\gamma\right)i_4 = e = \left(\frac{20-2\rho}{2-\rho} - 8\gamma\right)i_4$$

$$i_4 = \frac{2-\rho}{20-2\rho-8\gamma(2-\rho)}e$$

$$i = i_3 + i_4 = \left(1 + \frac{R_4}{R_3 - \rho}\right)i_4 = \frac{6-\rho}{2-\rho}i_4$$

Ostatecznie,

$$i = \frac{6-\rho}{20-2\rho+8\gamma(\rho-2)}e; \quad G_{ab} = \frac{6-\rho}{20-2\rho+8\gamma(\rho-2)}$$

### Praca kontrolna

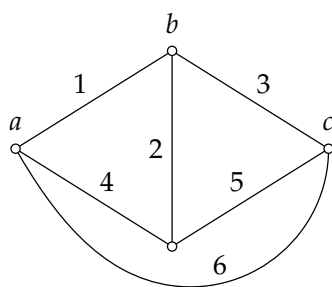
Obwód, jak w przykładzie 2., lecz zasilany prądem źródłowym  $j$  (zamiast  $e$ ). Obliczyć  $R_{ab}$  i porównać z wyznaczoną odwrotnością konduktancji  $G_{ab}^{-1}$ .

## Elementy geometrii obwodu

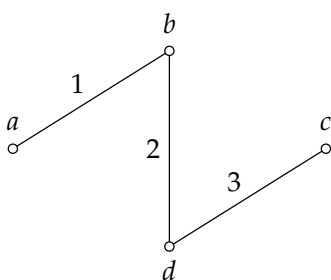
Badanie struktury geometrycznej obwodu (grafu) wraz z jej opisem algebraicznym umożliwia ustalenie liczby i „jakości” niezależnych równań PPK i NPK. Na wstępie, oprócz poznanych już konturu i pęku wprowadzimy pojęcia drzewa  $/D/$  i antydrzewa  $/A/$ , odnoszące się zarazem do grafu i obwodu.

Drzewem grafu  $G$  nazywamy maksymalny podgraf grafu, nie zawierający konturów.

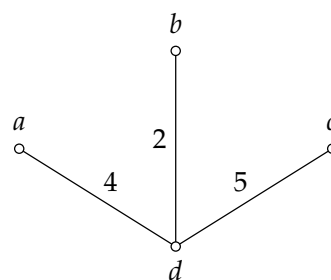
Antydrzewo jest dopełnieniem drzewa,  $A = G - D$  ( $D \cup A = G$ ).



rys. 1



rys. 2



rys. 3

$\{1,3\}$  ani  $\{1,2\}$  nie są drzewami, gdyż nie są to podgrafy maksymalne

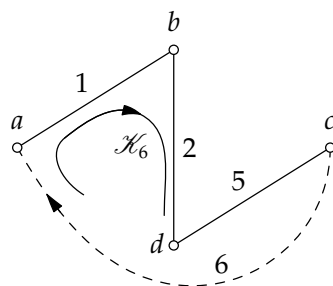
**Twierdzenie 1.** *Dowolne drzewo grafu  $G$  zawiera wszystkie wierzchołki, a liczba jego konarów (gałęzi drzewa) wynosi:  $d = w - 1$ , gdzie  $w$  — liczba wierzchołków grafu  $G$ .*

Odcinając kolejno konary **skrajne** otrzymujemy w końcu pojedynczą gałąź z dwoma wierzchołkami. Ponieważ przy każdym odcięciu liczba gałęzi oraz liczba wierzchołków maleje o 1, zachodzi:

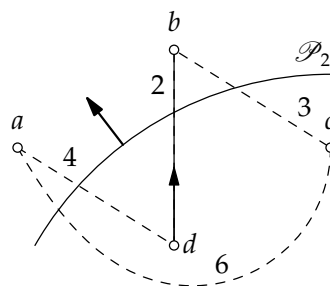
$$d - 1 = w - 2 \rightarrow d = w - 1, \quad (\text{c.b.d.u.})$$

Tym samym, liczba strun (gałęzi antydrzewa) wynosi  $a = g - d = g - w + 1$ ,  $g$  — liczba gałęzi grafu.

**Dowolna struna  $s_\mu$  antydrzewa wraz z niektórymi (w szczególności z wszystkimi) konarami drzewa tworzy jeden kontur,  $K_\mu \in \{s_\mu \cup D\}$ , zwany **konturem podstawowym**.**



rys. 4



rys. 5

I analogicznie:

Dowolny konar  $k_v$  drzewa wraz z niektórymi (w szczególności — z wszystkimi strunami antydrzewa tworzy jeden pęk  $P_v \in \{k_v \cup A\}$ , zwany **pękiem podstawowym**.

$$K_6 = \{6, 1, 2, 5\} = \{6 \cup D_1\}$$

$$K_4 = \{4, 1, 2\} \in \{4 \cup D_1\}$$

$$P_2 = \{2, 3, 4, 6\} = \{2 \cup A_1\}$$

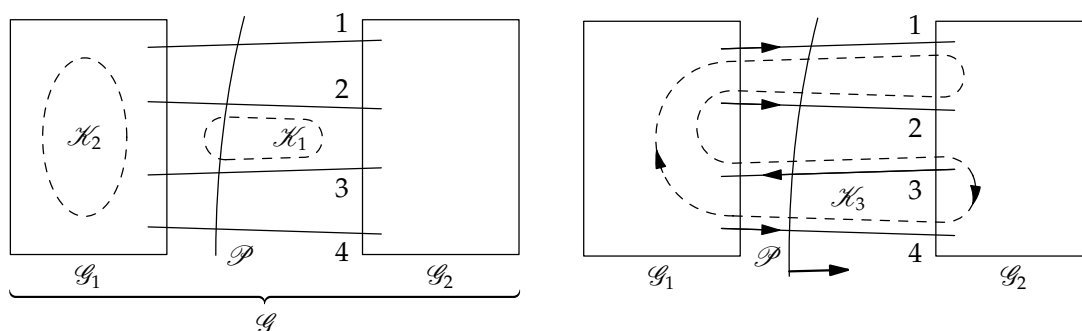
$$P_3 = \{3, 1, 2\} \in \{3 \cup A_4\}, A_4 = \{1, 2, 6\}$$

**Twierdzenie 2.** *Dowolny kontur  $K$  ma co najmniej jedną gałąź wspólną z dowolnym antydrzewem  $A$ ,  $K \cup A \neq \emptyset$ . (W przeciwnym razie  $K \in D = G - A$ , wbrew definicji drzewa.)*

I analogicznie,

**Twierdzenie 3.** *Dowolny pęk  $P$  ma co najmniej jedną gałąź wspólną z dowolnym drzewem  $D$ ,  $P \cup D \neq \emptyset$ . (W przeciwnym razie  $P \in A = G - D$ , co zaprzecza warunkowi  $P_v \in \{k_v \cup A\} \rightarrow A \in P_v$ .)*

**Twierdzenie 4.** *Dowolny kontur  $K$  i dowolny pęk  $P$  mają parzystą liczbę (w tym — zero) gałęzi wspólnych,  $n = 2m$ . (Uzasadnienie według rysunków.)*



$$K_1 \cap P = \{2, 3\}; \quad n_1 = 2$$

$$K_2 \cap P = \emptyset; \quad n_2 = 0$$

$$K_3 \cap P = \{1, 2, 3, 4\}; \quad n_3 = 4$$

Równania PPK dla pęków podstawowych (w liczbie  $d = w - 1$ ) stanowią zbiór **równań niezależnych** (każde z nich zawiera prąd konara  $k_v$ , który wyznacza pęk  $P_v$  i nie występuje w pozostałych pękach).

Równania NPK dla konturów podstawowych (w liczbie  $a = g - w + 1$ ) stanowią zbiór **równań niezależnych** (w każdym z nich — napięcie struny), która wyznacza odpowiedni kontur,  $K_\mu$

Równania PPK i NPK:

$$\sum_{k=1}^g \alpha_{vk} i_k = 0; \quad \sum_{k=1}^g \beta_{\mu k} u_k = 0$$

$$v = 1, 2, \dots, d; \quad \mu = 1, 2, \dots, a$$

można zapisać w postaci macierzowej:  $Ai = 0; \quad Bu = 0$

$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_g \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_g \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} |dxg| \\ A = \{\alpha_{vk}\}; \\ \pm 1v^0 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} |axg| \\ B = \{\beta_{\mu k}\} \\ \pm 1v^0 \end{matrix}$$

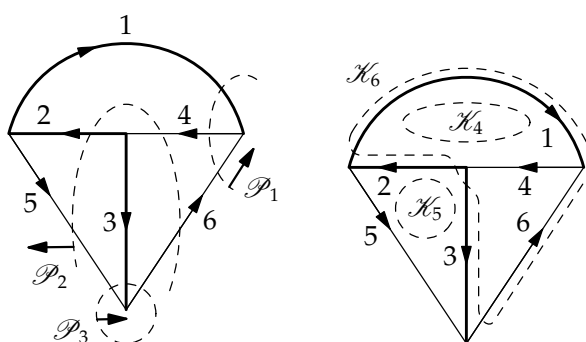
Jeśli konarom wybranego drzewa przyporządkujemy wskaźniki:  $1, 2, \dots, d$ , zaś strunom antydrzewa wskaźniki:  $d + 1, d + 2, \dots, d + a = g$ , a ponadto przyjmiemy orientację pęków (konturów) — zgodną z orientacją konarów (strun), jak na rysunkach 5 i 4, to w macierzach  $A$  i  $B$  wystąpią podmacierze jednostkowe, odpowiednio:

$$1_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad 1_a = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

a oprócz nich podmacierze  $P/dxa/$  i  $Q/axd/$ .  $P$  reprezentuje obecność strun w pękach podstawowych, wyznaczonych przez odpowiednie konary,  $Q$  — obecność konarów w konturach podstawowych, wyznaczonych przez odpowiednie struny.

$$A = [1_d | P] \quad B = [Q | 1_a]$$

konary struny                      konary struny



Drzewo zaznaczono linią grubą

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [1_3 | P] \quad \begin{array}{l} \text{macierz incydencyjna} \\ \text{pęków podstawowych} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [Q | 1_s] \quad \begin{array}{l} \text{macierz incydencyjna} \\ \text{konturów podstawowych} \end{array}$$

Jak łatwo zauważyć,  $Q = -P^t$  („ $t$ ” — transpozycja), co można wykazać dla dowolnego grafu. Tak więc, współczynniki w równaniach NPK dla zbioru konturów podstawowych można łatwo powiązać ze współczynnikami równań PPK dla zbioru pęków podstawowych (i na odwrót).

Tym samym iloczyn macierzy  $AB^t$  jest macierzą zerową:

$$AB^t = [1_d | P] \begin{bmatrix} Q^t \\ 1_a \end{bmatrix} = Q^t + P = 0 \quad /dxa/ \quad (1)$$

Powyzsza własność ( $AB^t = 0$  lub  $BA^t = 0$ ) dotyczy nie tylko macierzy incydencyjnych pęków i konturów podstawowych, lecz również macierzy dla dowolnego zbioru pęków i konturów,  $\bar{A} = \{a_{vk}\}_{v=1,2,\dots,N}$ ;  $\bar{B} = \{b_{\mu k}\}_{\mu=1,2,\dots,M}$ ,  $k = 1, 2, \dots, g$  **zorientowanych**.

Oznaczając  $\overline{AB}^t \stackrel{\text{df}}{=} C = \{C_{v\mu}\}$ , zauważmy że  $C_{v\mu}$  jest iloczynem skalarnym „wektorów” wierszowych  $\bar{A}_{nu}$  oraz  $\bar{B}_{\mu}$ , których „składowymi” są odpowiednio elementy  $a_{vk}$  oraz  $b_{\mu k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, g$  (transpozycja macierzy  $\bar{B}$ ).

Jak wiadomo, gałęzie wspólne pęku  $P_v$  oraz konturu  $K_\mu$  tworzą  $m$  par,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Łatwo zauważyć, że zgodności orientacji każdej pary gałęzi z orientacją pęku towarzyszy niezgodność orientacji tej pary z orientacją konturu (i na odwrót), czyli:

$$a_{vk_1} b_{\mu k_1} + a_{vk_2} b_{\mu k_2} = (\pm 1)(\pm 1) + (\pm 1)(\pm 1) = 0,$$

gdzie parę tworzą gałęzie  $k_1$  i  $k_2$ .

Przykładowo dla pęku  $P \stackrel{\text{df}}{=} P_1$  i konturu  $K_3$ , które przedstawia rys. 7, zachodzi:

$$c_{13} = \sum_{k=1}^g a_{1k} b_{3k} = \underbrace{[(+1)(+1) + (+1)(-1)]}_{\text{para 1,2}} + \underbrace{[(-1)(-1) + (+1)(-1)]}_{\text{para 3,4}} = (1 - 1) + (1 - 1) = 0$$



1) Ze względu na podział macierzy  $A$  i  $B$  na dwie podmacierze, odpowiadające konarom ( $1_d$  i  $Q$ ) oraz strunom ( $P$  i  $1_a$ ) musimy wyodrębnić zbiór prądów konarowych (wektor  $i_{\mathcal{D}}$ ) oraz prądów strunowych (wektor  $i_A$ ).

Analogicznie — zbiór napięć konarowych (wektor  $u_{\mathcal{D}}$ ) i strunowych (wektor  $u_A$ ).

W związku z tym, prawa Kirchhoffa przyjmują postać:

$$\text{PPK: } Ai = [1_d | P] \begin{bmatrix} i_{\mathcal{D}} \\ i_A \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

$$\text{NPK: } Bu = [Q | 1_a] \begin{bmatrix} u_{\mathcal{D}} \\ u_A \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Po rozwinięciu (2) i (3) widać, że prądy konarowe (napięcia strunowe) są kombinacjami liniowymi prądów strunowych (napięć konarowych):

$$i_{\mathcal{D}} = -Pi_A = Q^t i_A \quad (4)$$

$$u_A = -Qu_{\mathcal{D}} = P^t u_{\mathcal{D}} \quad (5)$$

Tym samym, rozwiązanie obwodu sprowadza się do obliczenia prądów strunowych (jeśli jako niewiadome przyjmiemy prądy gałęziowe) lub napięć konarowych (jeśli jako niewiadome przyjmiemy napięcia gałęziowe). W wyniku eliminacji  $i_{\mathcal{D}}$  pozostaje do rozwiązania układ  $a = g - w + 1$  równań w **metodzie prądów strunowych**, w wyniku eliminacji  $u_A$  — układ  $d = w - 1$  równań w **metodzie napięć konarowych**.

Oczywiste jest, że w obydwu metodach wykorzystujemy zarówno równania NPK jak PPK, a ponadto zależności napięciowo-prądowe w metodzie prądów strunowych lub prądowo-napięciowe w metodzie napięć konarowych.

2) Równania PPK i NPK oraz własność (1) skutkują odpowiednio wnioskami:

$$i = B^t i_A \quad (6)$$

$/g \times 1/ \quad /g \times a/; /a \times 1/$

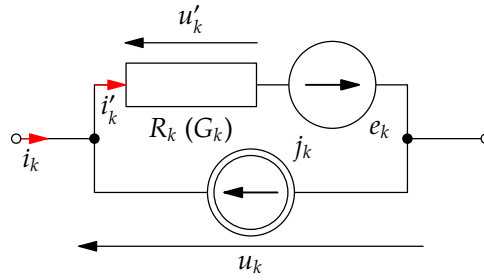
$$u = A^t u_{\mathcal{D}} \quad (7)$$

$/g \times 1/ \quad /g \times d/; /d \times 1/$

które można uznać za alternatywne formy PPK i NPK.

3) Przyjmujemy, że dowolna gałąź obwodu (wskaźnik  $k = 1, 2, \dots, g$ ) oprócz elementu  $R_k(G_k)$  może zawierać źródło napięcia  $e_k$  oraz źródło prądu  $j_k$  — rysunek.

Zakładamy przeciwne orientacje prądu gałęziowego  $i_k$  oraz napięcia gałęziowego  $u_k$ , a także typowe orientacje  $e_k$  i  $j_k$ . Te ostatnie można uznać za odpowiadające rzeczywistości, jeśli dobierzemy właściwy znak napięcia lub/i prądu źródłowego.



Oznaczenia pomocnicze:

$$\bar{e}_k = e_k - R_k j_k$$

$$\bar{j}'_k = j_k - G_k e_k$$

$$u_k(i_k) : u_k = u'_k - e_k = R_k i'_k - e_k = R_k (i_k + j_k) - e_k = R_k i_k - (e_k - R_k j_k)$$

$$u_k = R_k i_k - \bar{e}_k$$

$$i_k(u_k) : i_k = i'_k - j_k = G_k u'_k - j_k = G_k (u_k + e_k) - j_k = G_k u_k - (j_k - G_k e_k)$$

$$i_k = G_k u_k - \bar{j}$$

W postaci macierzowej:

$$u = Ri - \bar{e}, \text{ gdzie } \bar{e} = e - Rj \quad (8)$$

$$i = Gu - \bar{j}, \text{ gdzie } \bar{j} = j - Ge \quad (9)$$

$$R = \text{diag}\{R_1, R_2, \dots, R_g\}; \quad G = \text{diag}\{G_1, G_2, \dots, G_g\}$$

$$e = [e_1, e_2, \dots, e_g]^t; \quad j = [j_1, j_2, \dots, j_g]^t$$

4) Uwzględniając kolejno (3), (8) i (6) otrzymujemy:

$$Bu = B(Ri - \bar{e}) = BRB^t i_A - B\bar{e} = 0$$

czyli

$$R_p i_A = \bar{e}_p \quad \text{metoda prądów strun.} \quad (10)$$

gdzie:

$$R_p = BRB^t \quad (11)$$

$$\bar{e}_p = B(e - Rj) \quad (12)$$

5) Uwzględniając kolejno (2), (9) i (7), otrzymujemy

$$Ai = A(Gu - \bar{j}) = AGA^t u_D - A\bar{j} = 0$$

czyli

$$G_p u_{\mathcal{D}} = \bar{j}_p \quad \text{metoda napięć konarowych} \quad (13)$$

gdzie:

$$G_p = AGA^t \quad (14)$$

$$\bar{j}_p = A\bar{j} = A(j - Ge) \quad (15)$$

$R_p$  — macierz rezystancyjna konturów podstawowych

$G_p$  — macierz konduktancyjna pęków podstawowych

$\bar{e}_p$  — zmodyfikowany wektor napięć źródłowych w konturach podstawowych

$\bar{j}_p$  — zmodyfikowany wektor prądów źródłowych w pękach podstawowych

## Dyskusja

1) W metodzie prądów strunowych (10):  $R_k < \infty$ , więc nie dopuszcza się rozwarcia. Tym samym, źródła prądu  $j_k$  nie można uznać za gałąź. Nie istniałaby wówczas zależność napięciowo-prądowa  $u_k(i_k)$ , czyli  $u_k(-j_k)$ .

Dopuszczalny jest element  $R_k$  jako gałąź ( $e_k = 0, j_k = 0, u_k = R_k i_k$ ), a w szczególności — zwarcie ( $R_k = 0, e_k = 0, j_k = 0$ ), a także element  $e_k$  ( $R_k = 0, j_k = 0$ ).

2) W metodzie napięć konarowych (13):  $G_k < \infty$ , a więc nie dopuszcza się zwarcia. Tym samym, źródła napięcia  $e_k$  nie można uznać za gałąź. Nie istniałaby wówczas zależność prądowo-napięciowa  $i_k(u_k)$ , czyli  $i_k(-e_k)$ .

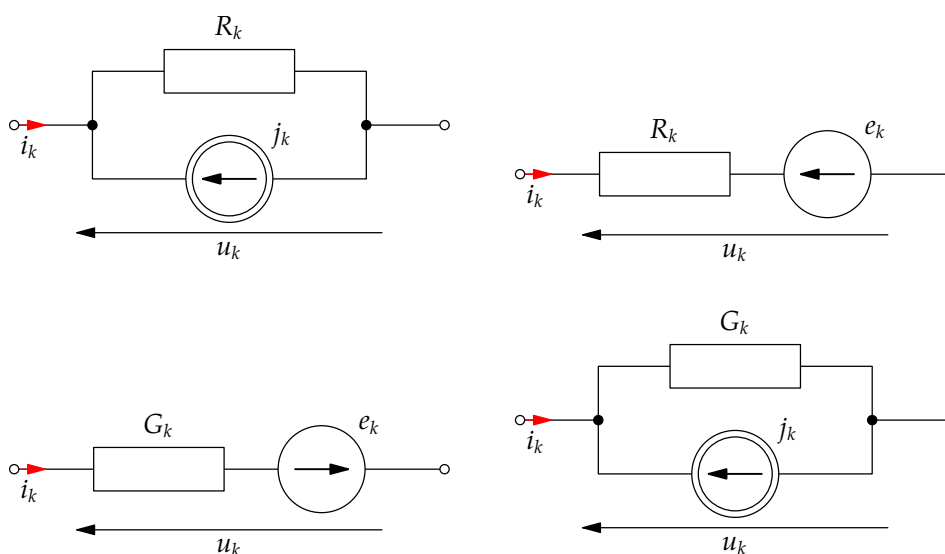
Dopuszczalny jest element  $G_k$  (gdy  $e_k = 0$  i  $j_k = 0$ ), a w szczególności — rozwarcie ( $G_k = 0$ ), jak również element  $j_k$  (gdy  $G_k = 0, e_k = 0$ ).

3) Macierze  $R_p$  i  $G_p$  są symetryczne:

$$R_p^t = (BRB^t)^t = (B^t)^t R^t B^t = BRB^t = R_p$$

( $R$  i  $G$  jako macierze diagonalne są oczywiście symetryczne).

4) Wyrażenia  $R_k j_k$  oraz  $G_k e_k$  oznaczają równoważne źródła napięcia i prądu:



$i_k(u_k)$  — jednakowe,

$u_k(i_k)$  — jednakowe.

5) Składowe wektorów  $Be$  oraz  $Aj$  stanowią sumy algebraiczne napięć źródłowych w odpowiednich konturach podstawowych oraz prądów źródłowych w odpowiednich pękach podstawowych. Można się przekonać, że ze znakami **plus** wystąpią te napięcia źródłowe (prądy źródłowe), których orientacje są **zgodne** z orientacją konturu (pęku). Orientacje konturu (pęku) identyfikujemy z orientacją odpowiedniego prądu strunowego (napięcia konarowego).

Powyższe dotyczy zarazem **równoważnych** źródeł napięcia i równoważnych źródeł prądu. Znaki minus na odwrót.

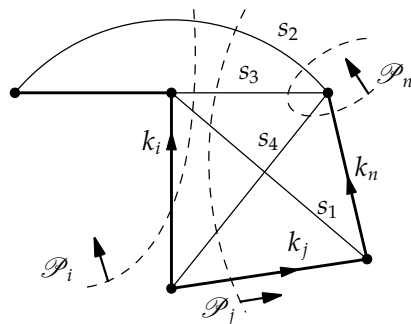
7) Analogiczne algorytmy można sformułować dla elementów macierzy  $G_p$  (kontury zastępujemy pękami, struny — konarami i na odwrót).

$$G_p = \{g_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots,d}; \quad g_{ij} = A_i G(A_j)^t = \sum_{k=1}^g a_{ik} a_{jk} G_k$$

Gałęziami wspólnymi pęków  $P_i$  i  $P_j$  są te **struny**, które należą do obydwu pęków podstawowych, lub (co jest równoważne) — wyznaczają kontury, do których należą konary pęków  $P_i$  i  $P_j$ .

Ustalając znaki elementów  $G_{ij}$  wygodniej jest rozważyć **orientacje konarów w tych konturach**, niż badać orientacje pęków.

Znaki plus kładziemy, gdy orientacje konarów są zgodne, minus — gdy są niezgodne.

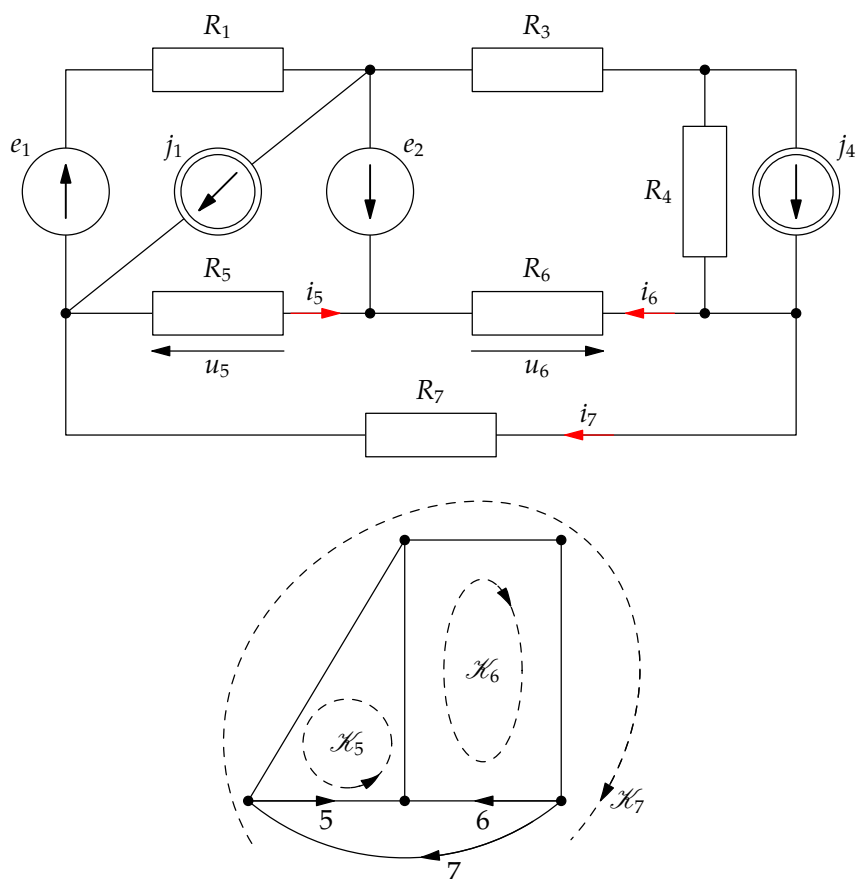


$$g_{ij} = g_{ji} = -(G_{s_2} + G_{s_3} + G_{s_1})$$

$$g_{jj} = G_j + G_{s_2} + G_{s_3} + G_{s_4} + G_{s_1}$$

$$g_{jn} = g_{nj} = +(G_{s_2} + G_{s_3} + G_{s_4})$$

**Przykład 1.**



Tylko jedna gałąź obwodu zawiera „komplet” elementów:  $\{R_1, e_1, j_1\}$ .

Przyjmujemy parametry:

$$R_1 = R_3 = R_4 = 3\Omega,$$

$$R_5 = R_6 = R_7 = 6\Omega,$$

$$e_1 = 4V,$$

$$e_2 = 6V,$$

$$j_1 = j_4 = 2A$$

i w myśl algorytmu (10)÷(12) układamy wprost równania obwodu, opisujące wektor prądów strunowych  $i_A = [i_5, i_6, i_7]^t$ :

$$\begin{bmatrix} R_5 + R_1 & 0 & -R_1 \\ 0 & R_6 + R_3 + R_4 & R_3 + R_4 \\ -R_1 & R_3 + R_4 & R_7 + R_1 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_2 - e_1 + R_1 j_1 \\ -e_2 + R_4 j_4 \\ e_1 - R_1 j_1 + R_4 j_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 0 & 12 & 6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ lub po uproszczeniu}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \det R_p = 44$$

Dopełnienia algebraiczne:  $\Delta_{11} = 16$ ,  $\Delta_{12} = \Delta_{21} = -2$ ,  $\Delta_{13} = \Delta_{31} = 4$ ,  $\Delta_{22} = 14$ ,  $\Delta_{23} = \Delta_{32} = -6$ ,  $\Delta_{33} = 12$ .

Wektor prądów strunowych:

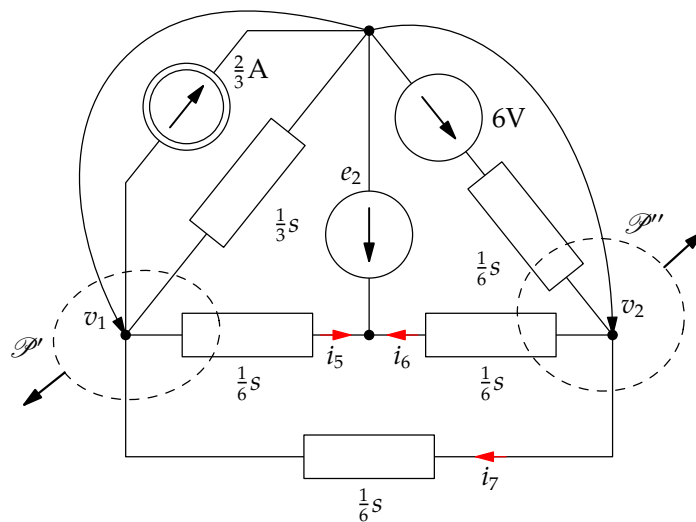
$$i_A = R_p^{-1} e_p = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Aby sprawdzić otrzymane rezultaty zastosujemy metodę napięć konarowych w wersji skróconej. Na wstępie, gałąź  $\{R_1, e_1, j_1\}$  redukujemy do pary elementów:  $G'_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{3}S$ ,  $j'_1 = j_1 - G_1 e_1 = \frac{2}{3}A$ .

Dwukońcówkowy zbiór elementów (dwójnik)  $\{R_3, R_4, j_4\}$  zastępujemy równoważną gałęzią  $\{R_3 + R_4, R_4 j_4\} = \{6\Omega, 6V\}$ .

Aby uniknąć wprowadzania dodatkowej niewiadomej  $i_{e_2}$  pomijamy pęk wyznaczony przez konar  $e_2$  i układamy tylko dwa niezbędne równania PPK dla pęków podstawowych, jak na rysunku.



$$P' : \frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{6}(v_1 - v_2) + \frac{1}{6}(v_1 - e_2) = \frac{2}{3}$$

$$P'' : \frac{1}{6}(v_2 - v_1) + \frac{1}{6}(v_2 - 6) + \frac{1}{6}(v_2 - e_2) = 0$$

$$e_2 = 6V$$

$$\frac{2}{3}v_1 - \frac{1}{6}v_2 = \frac{2}{3} + 1 = 5/3 \quad | \cdot 6$$

$$-\frac{1}{6}v_1 + \frac{1}{2}v_2 = 2$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 30 + 12 \\ 10 + 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42}{11} \\ \frac{58}{11} \end{bmatrix}$$

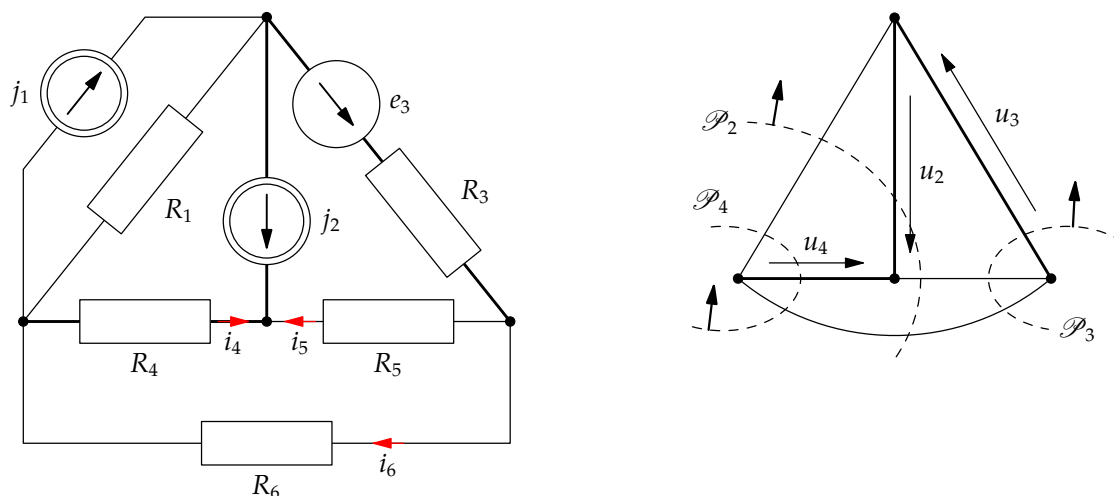
$$i_5 = \frac{1}{6}(v_1 - e_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{42 - 66}{11} = -\frac{12}{33}$$

$$i_6 = \frac{1}{6}(v_2 - e_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{58 - 66}{11} = -\frac{4}{33}$$

$$i_7 = \frac{1}{6}(v_2 - v_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{58 - 42}{11} = \frac{8}{33} \quad (\text{jak wyżej})$$



## Przykład 2.



Zgodnie z algorytmem metody napięć konarowych (13) ÷ (15) możemy zapisać od razu uporządkowany układ równań z niewiadomymi  $u_2, u_3, u_4$  — składowymi wektora  $u_{\mathcal{D}}$ :

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_5 + G_6 & G_5 + G_6 & -(G_1 + G_6) \\ G_5 + G_6 & G_3 + G_5 + G_6 & -G_6 \\ -(G_1 + G_6) & -G_6 & G_4 + G_1 + G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_2 - j_1 \\ G_3 e_3 \\ j_1 \end{bmatrix}$$

Zakładając parametry:  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ ,  $R_4 = R_5 = R_6 = 6\Omega$ ,  $j_1 = 1A$ ,  $j_2 = 2A$ ,  $e_3 = 8V$  mamy:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 8 & 4 & -6 \\ 4 & 7 & -2 \\ -6 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 132$$

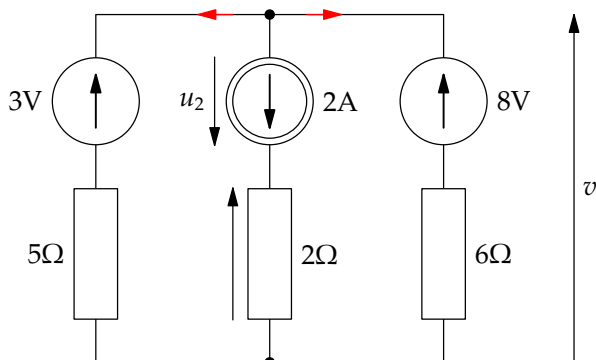
$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{12}{132} \begin{bmatrix} 52 & -20 & 34 \\ -20 & 28 & -8 \\ 34 & -8 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{11} \begin{bmatrix} 26 & -10 & 17 \\ -10 & 14 & -4 \\ 17 & -4 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{11} \begin{bmatrix} 23 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix}$$

### Uwaga

Zastępując symetryczny „trójkąt”  $\{R_4, R_5, R_6\} = \{6, 6, 6\} \Omega$  równoważną „gwiazdą”

$$\{R^\lambda, R^\lambda, R^\lambda\},$$

gdzie  $R^\lambda = \frac{1}{3}R^\Delta = 2\Omega$ , otrzymujemy prostszy obwód:



Dla jedynej niewiadomej  $v$ :

$$\frac{1}{5}(v - 3) + \frac{1}{6}(v - 8) + 2 = 0$$

$$\frac{11}{30}v = \frac{3}{5} + \frac{8}{6} - 2 = -\frac{2}{30}$$

$$v = -\frac{2}{11}$$

Zastosowana transfiguracja zachowuje wartość prądów  $i_{e_1}$ ,  $i_{e_3}$ , a także napięcie źródła prądu ( $u_2$ ).

$$u_2 = R^\lambda j_2 - v = 2j_2 - v = 4 + \frac{2}{11} = \frac{46}{11} [\text{V}] \quad (\text{jak wyżej})$$

Prądy w gałęziach trójkąta (obwód oryginalny)  $i_5$ ,  $i_6$ ,  $i_4$  wynikają z obliczonych już napięć  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $u_4$ :

$$i_4 = -G_4 u_4 = -\frac{1}{6} \cdot \frac{58}{11} = -\frac{29}{33} [\text{A}]$$

$$i_5 = -G_5 (u_3 + u_2) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{2(14 + 23)}{11} = -\frac{37}{33} [\text{A}]$$

$$i_6 = G_6 (u_4 - u_2 - u_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2(29 - 23 - 14)}{11} = -\frac{8}{33} [\text{A}]$$

Na koniec, zostanie zilustrowana skrócona metoda prądów strunowych — 2 równania (dla konturów  $K_1$  i  $K_6$ );  $i_2 = j_2 = 2$  A.

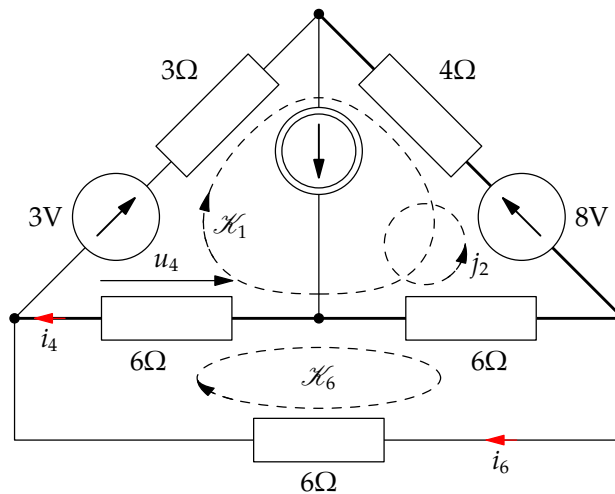
$$K_1 : 3i_1 + 4(i_1 - 2) + 6(i_1 - i_6 - 2) + 6(i_1 - i_6) = 3 - 8$$

$$K_6 : 6i_6 + 6(i_6 - i_1) + 6(i_6 - i_1 + 2) = 0 \quad / : 6$$

$$19i_1 - 12i_6 = 3 - 8 + 8 + 12$$

$$-2i_1 + 3i_6 = -2$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -12 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 15 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 19 \end{bmatrix} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 21 \\ -8 \end{bmatrix}$$



$$\Delta = 33$$

Ponadto:

$$i_4 = i_1 - i_6 = \frac{21}{33} + \frac{8}{33} = \frac{29}{33}$$

$$u_4 = 6i_4 = \frac{58}{11} \quad (\text{jak wyżej})$$

## Twierdzenie o źródle zastępczym (Thévenina i Nortona)

Jak już wspomniano (przykład 1, str. 3?) dwójnikowi (**aktywnemu**), który zawiera elementy  $R$  i źródła niezależne, można przyporządkować **równoważną** gałąź 2-elementową  $(e, R)$ , przy czym pojęcie **równoważności** należy rozumieć jako **identyczność** zależności  $u(i)$  lub  $i(u)$  dwójnika i gałęzi. W konkretnych, prostych przypadkach zbadanie zależności  $u(i)$  lub  $i(u)$  nie przysparza trudności.

Dla dowolnego, rezystancyjnego dwójnika aktywnego zachodzi, przy zgodnej orientacji napięcia i prądu:

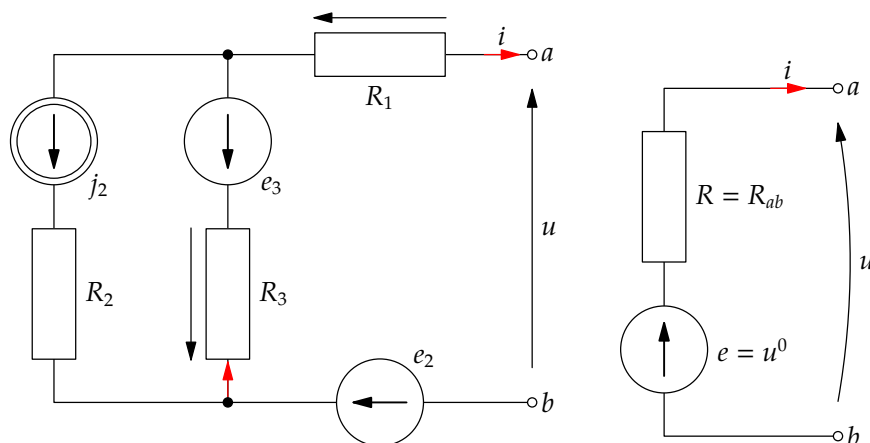
$$u = \text{const}_1 [\text{V}] - \text{const}_2 [\Omega] \cdot i = c_1 - c_2 i.$$

Jak widać,  $c_1 = u|_{i=0} = u^0$ ,  $c_2 = \frac{u}{i}|_{c_1=0} = R_{ab}$  ( $a, b$  — końcówki dwójnika).

Napięcie dwójnika w stanie bezprądowym (zwane napięciem **jałowym**)  $u^0$  jest kombinacją liniową napięć i prądów źródłowych dwójnika, a więc jest to wielkość o charakterze źródłowym,  $u^0 = e$ .

Jeśli wszystkie źródła niezależne zostaną upasywnione (zwarcia zamiast źródeł napięcia i rozwarca w miejsce źródeł prądu), wówczas  $u^0 = 0$  i gałąź równoważna zawiera tylko element  $R = R_{ab}$ .

### Przykłady



Dwójnik aktywny:

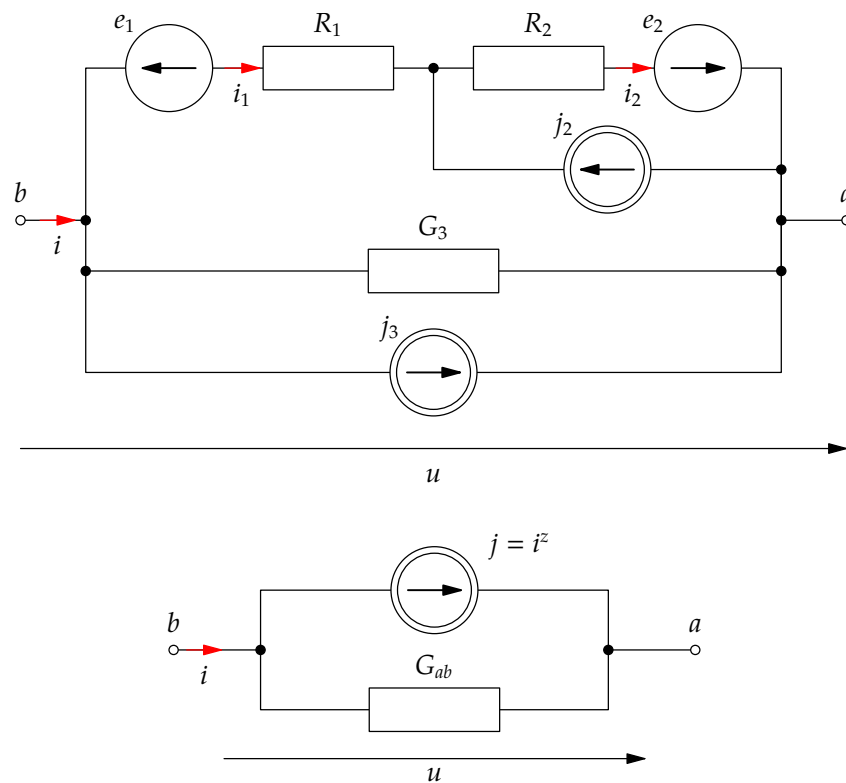
$$u = -R_1 i - R_3(i + j_2) + e_3 + e_2 = -(R_1 + R_3)i + (e_3 + e_2 - R_3 j_2)$$

Gałąź:

$$u = e - R_{ab} i$$

$$e = u^0 = e_3 + e_2 - R_3 j_2; \quad R_{ab} = R_1 + R_3$$

Zrozumiałe jest, że  $R_2$  nie ma wpływu na  $R_{ab}$ , ani na  $u^0$ .



$$(1) \quad u = e_2 - e_1 - R_1 i_1 - R_2(i_1 + j_2) \rightarrow i_1 = \frac{e_2 - e_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} j_2 - \frac{1}{R_1 + R_2} u$$

$$(2) \quad i = i_1 - G_3 u + j_3$$

$$i(u) = \underbrace{\left( j_3 + \frac{e_2 - e_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} j_2 \right)}_{j=i^z} - \underbrace{\left( G_3 + \frac{1}{R_1 + R_2} \right)}_{G_{ab}} u = i^z - G_{ab} u$$

Jak widać, zależność  $i(u)$  dwójnika ma analogiczną postać:

$$i = \text{const}_1 [A] - \text{const}_2 [S] \cdot u = i_{|u=0} - G_{ab} u = i^z - G_{ab} u,$$

$i^z$  — prąd zwarcia

$$G_{ab} = \frac{1}{R_{ab}} = \frac{i}{u} \Big|_{i^z} = 0 \quad (\text{napięcia i prądy źródłowe, upasywnione})$$

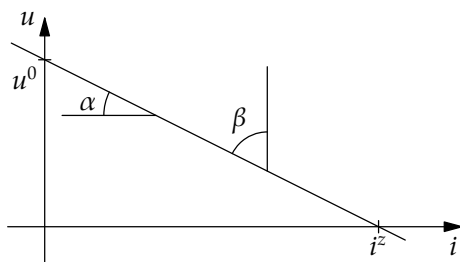
Porównując obydwie zależności,

$$/j, G/ : \quad u = \frac{1}{G_{ab}} (i^z - i) = R_{ab} i^z - R_{ab} i = u^0 - R_{ab} i$$

$$u^0 = R_{ab} i^z$$

$$/e, R/ : \quad u = u^0 - R_{ab} i$$

Ilustrację graficzną zależności  $u(i)$  i zarazem  $i(u)$  dwójnika aktywnego w przypadku zgodnych orientacji  $u$  oraz  $i$  przedstawia rysunek:



$$u = u^0 - R_{ab}i; \quad \operatorname{tg} \alpha = mR_{ab}$$

$$(i = i^z - G_{ab}u); \quad \operatorname{tg} \beta = nG_{ab}$$

Reasumując, twierdzenie o źródle zastępczym można sformułować następująco:

Dowolny, rezystancyjny dwójnik aktywny (końcówki  $a, b$ ), dla którego istnieje zależność  $u(i)$  (zależność  $i(u)$ ) jest równoważny:

- gałęzi 2-elementowej  $/e, R/$ , gdzie  $e = u^0 = u|_{i=0}$ ,

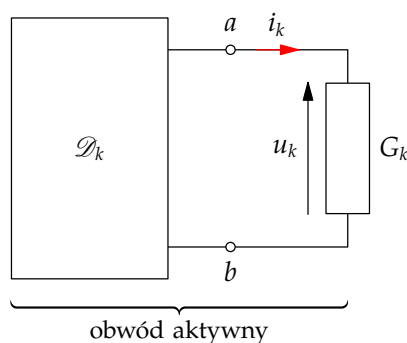
$R = R_{ab}$  — rezystancja dwójnika po upasywnieniu źródeł (tw. Thévenina).

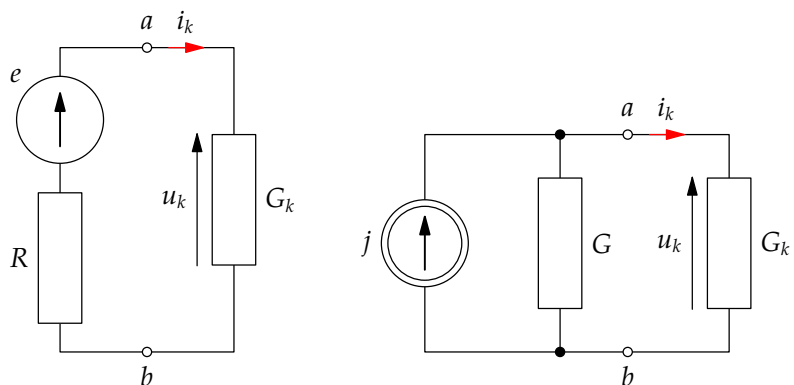
- gałęzi 2-elementowej  $/j, G/$ , gdzie  $j = i^z = i|_{u=0}$ ,

$G = G_{ab} = 1/R_{ab}$  — konduktancja dwójnika po upasywnieniu źródeł (tw. Nortona).

### Zastosowanie

W obwodzie można wyodrębnić dowolną gałąź  $G_k$  (końcówki  $a, b$ ) i potraktować obwód jako jej połączenie z (dwukońcówkową) resztą obwodu — dwójnikiem  $D_k$ . Dwójnikowi  $D_k$  można przyporządkować równoważną gałąź (2-elementową)  $/e, R/$  lub  $/j, G/$ ;  $e = u^0$ ,  $j = i^z$ . Otrzymujemy uproszczony obwód  $\{/e, R/ \cup G_k\}$  lub  $\{/j, G/ \cup G_k\}$ , zawierający tylko dwie gałęzie, który łatwo rozwiązać (obliczyć prąd  $i_k$  lub/i napięcie  $u_k$ ).



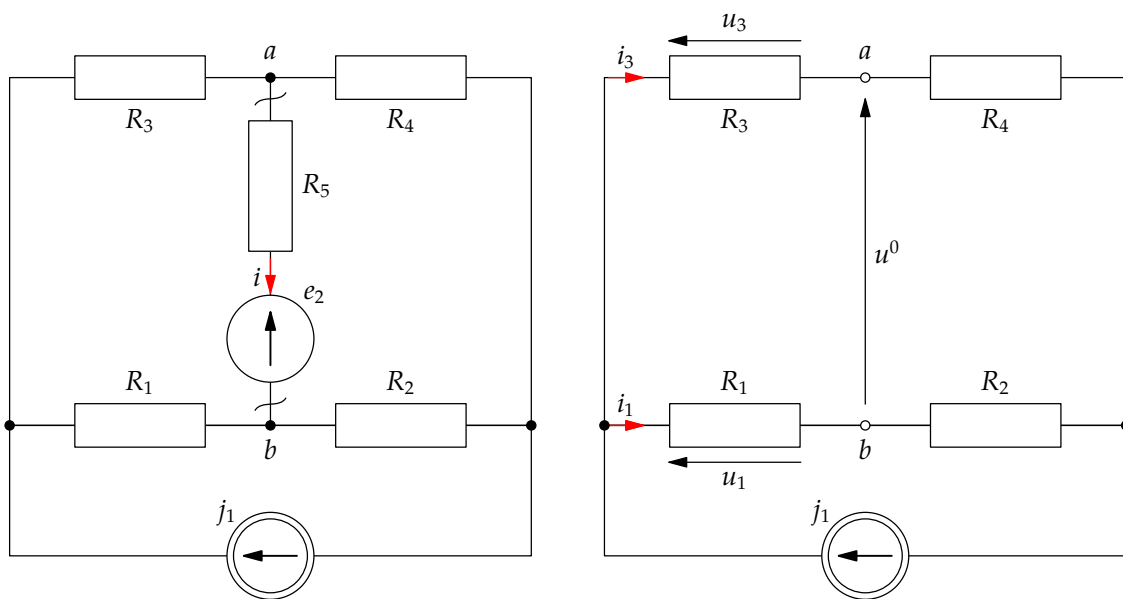


### Uwaga

Nic nie stoi na przeszkodzie, by twierdzenie zastosować dwukrotnie: dla dwójnika  $D_k$  oraz gałęzi  $G_k$ .

### Przykład

$R_1 = 4\Omega, R_2 = 4\Omega, R_3 = 8\Omega, R_4 = 2\Omega, R_5 = 6\Omega, j_1 = 3A, e_2 = 12A$ :

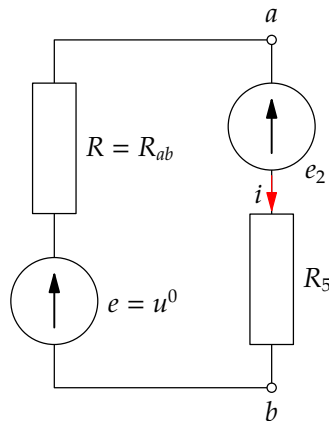


Po odcięciu gałęzi  $G = \{R_5, e_2\}$  liczymy  $u^0$  oraz  $R_{ab}$  ( $j_1 \rightarrow$  rozwarcie)

$$\begin{aligned}
 u^0 &= u_1 - u_3 = R_1 i_1 - R_3 i_3 = R_1 \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \cdot j_1 - R_3 \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \cdot j_1 = \\
 &= \left( 4 \cdot \frac{10}{18} - 8 \frac{8}{18} \right) \cdot j_1 = \\
 &= -\frac{24}{18} j_1 = -\frac{4}{3} j_1 = -4 \text{ [V]}
 \end{aligned}$$

$$R_{ab} = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_2 + R_4} = \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = 4\Omega$$

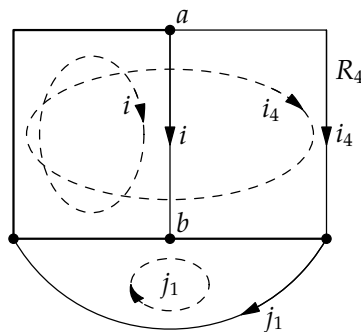
Obwód uproszczony (Thévenin)



$$i = \frac{e - e_2}{R_{ab} + R_5} = \frac{u^0 - e_2}{R_{ab} + R_5} = \frac{-4 - 12}{4 + 6} = -1,6A$$

Dla sprawdzenia wyniku posłużymy się tradycyjną metodą — prądów strunowych.

$$D = \{R_1, R_2, R_3\}; A = \{j_1, /e_2, R_5/, R_4\}$$



$$\begin{cases} R_5 i + R_3(i + i_4) + R_1(i + i_4 - j_1) = e_2 \\ R_4 i_4 + R_2(i_4 - j_1) + R_1(i_4 + i - j_1) + R_3(i_4 + i) = 0 \end{cases}$$

Po podstawieniu parametrów:

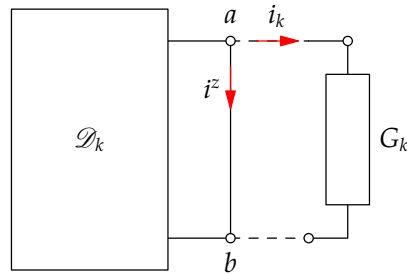
$$\begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} : 6$$

$$\begin{bmatrix} i \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

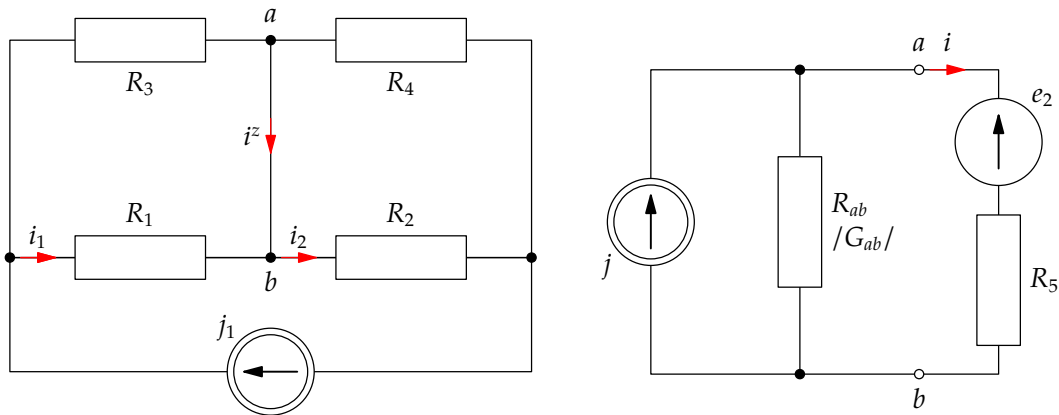
$$i = \frac{-8}{5} = -1,6A \text{ (jak wyżej)}$$



Zastosowanie twierdzenia Nortona sprowadza się do obliczenia prądu zwarcia  $i^z$  oraz konduktancji  $G_{ab}$  dwójnika, którego źródła zostały upasywnione. Obwód uproszczony zawiera również dwie gałęzie: gałąź równoważną dwójnikowi  $D_k$ ,  $/j, G_{ab}/$ ,  $j = i^z$  oraz gałąź  $G_k$ .



Przykładowo, dla rozpatrywanego obwodu, obliczenie prądu zwarcia jest jeszcze łatwiejsze, niż napięcia jałowego.



$$i^z = i_2 - i_1 = j_1 \frac{R_4}{R_2 + R_4} - j_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 3 \left( \frac{2}{6} - \frac{8}{12} \right) = 1 - 2 = -1A = j$$

$$G_{ab} = \frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{4} S$$

metoda superpozycji:

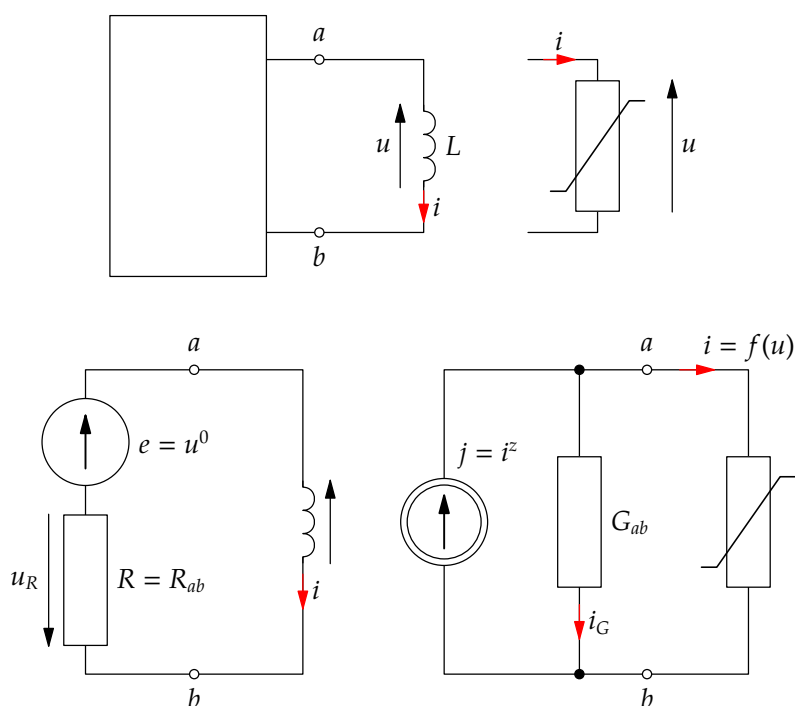
$$i = j^{(j)} + i^{(e_2)} = j \frac{R_{ab}}{R_{ab} + R_5} - \frac{e_2}{R_{ab} + R_5} = -\frac{4}{10} - \frac{12}{10} = -1,6A \quad (\text{jak wyżej})$$

Jak widzimy zastosowanie twierdzenia Thévenina lub Nortona daje efektywne analizy obwodu.

## Inne zastosowanie twierdzeń

Bardzo naturalnym jest wykorzystanie twierdzenia o źródle zastępczym (w obydwu wersjach) w obwodzie, który zawiera pojedynczy element jakościowo inny, niż pozostałe (konserwatywny, nieliniowy, niestacjonarny).

Element ten można wyodrębnić (gałąź  $G_k$ ), natomiast pozostałym elementom (dwójnik  $D_k$ ) przyporządkować gałąź równoważną  $/e, R_{ab}/$  lub  $/j, G_{ab}/$  — jak na rysunku.



$$L \frac{di}{dt} + R_{ab}i = u^0; f(u) + G_{ab} \cdot u = i^z$$

Odkładając na później analizę obwodu z pojedynczym elementem konserwatywnym, rozważymy przypadek elementu nieliniowego, o charakterystyce:

$i = f(u)$ ;  $f$  — funkcja jednoznaczna, na przykład:

$$i = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0 \\ \gamma u^2 & \text{dla } u > 0 \end{cases}$$

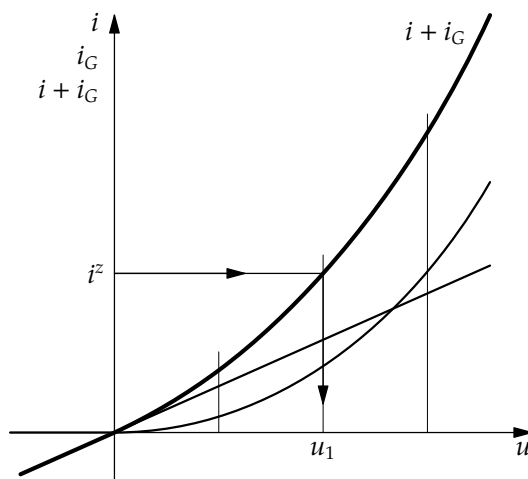
W myśl PPK zachodzi:  $i + i_6 = j = i^z$

$$\gamma u^2 + G_{ab}u - i^z = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{2\gamma} \left( -G_{ab} + \sqrt{G_{ab}^2 + 4\gamma i^z} \right) > 0$$

Drugie rozwiązanie,  $u_2 = \frac{1}{2\gamma} (-G_{ab} - \sqrt{\Delta}) < 0$  należy odrzucić.

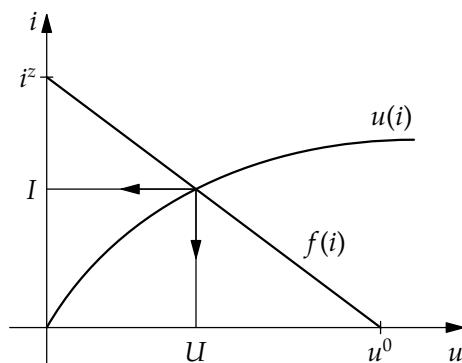
Ilustracja graficzna rozwiązania:



Badając odpowiedź (prąd i napięcie) elementu nieliniowego o charakterystyce  $i(u) = A(1 - e^{-\alpha u})$ ,  $A > 0$ ,  $\alpha > 0$  posłużymy się na odmianę twierdzeniem Thévenina i metodą graficzną. Wprawdzie dana zależność  $i(u)$  można przekształcić do postaci:  $u(i) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{A}{A-i}$ , ale zastosowanie metody graficznej tego nie wymaga. Wystarczy zinterpretować wykres zależności  $i(u)$  jako wykres  $u(i)$ . Zachodzi:

$$R_{ab}i + u(i) = u^o \rightarrow f(i) = u^o - Ri = u(i)$$

Rozwiązanie stanowią współrzędne  $/U, I/$  punktu przecięcia prostej  $f(i)$  oraz charakterystyki  $u(i)$ .



## Addytywność mocy (twierdzenia Tallegena)

Suma mocy pobieranych (lub oddawanych) przez wszystkie gałęzie obwodu równa się zero:

$$\sum_{k=1}^g u_k i_k = u^T i = (B^T u_{\mathcal{D}})^T A^T i_A = u_{\mathcal{D}}^T B A^T i_A = 0$$

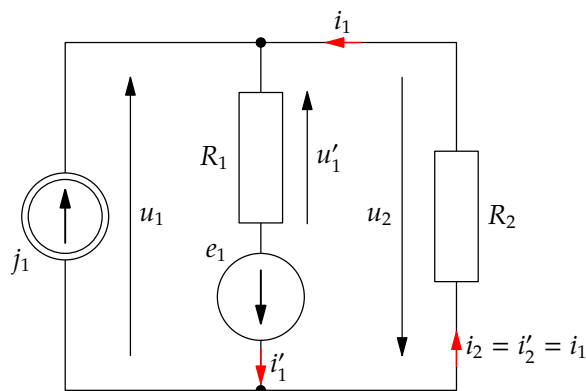
Odnosząc się do schematu dowolnej,  $k$ -tej gałęzi, mamy:

$$u_k i_k = u_k (i'_k - j_k) = u_k i'_k - P_{j_n}^{odd} = (u'_k - e_k) i'_k - P_{j_k}^{odd} = P_{R_k}^{pob} - P_{e_k}^{odd} - P_{j_n}^{odd}$$

$$\sum_{k=1}^g u_k i_k = 0 = \sum_1^g P_{R_k} - \sum_1^g P_{e_k} - \sum_1^g P_{j_k}$$

$$\sum_{k=1}^g P_{R_k}^{pob} = \sum_{k=1}^g P_{e_k}^{odd} + \sum_{k=1}^g P_{j_k}^{odd}$$

## Przykład



$$u_2 = u'_2 = -u_1$$

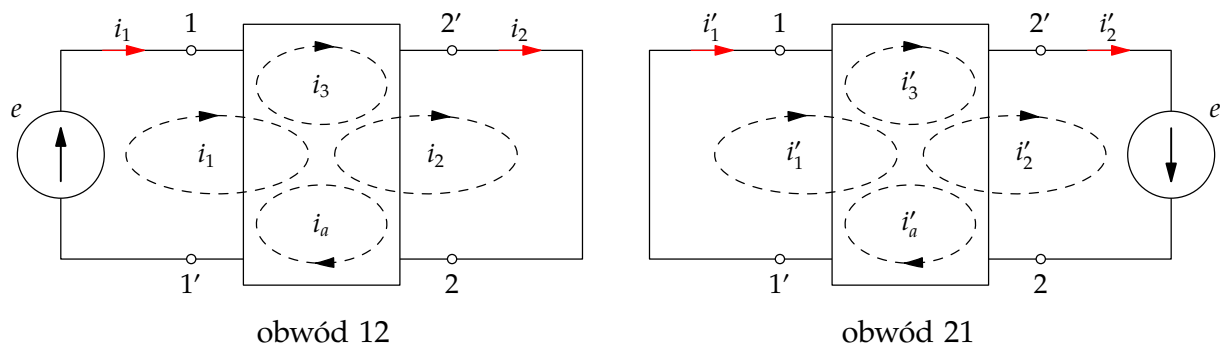
$$P_{R_1} + P_{R_2} = u'_1 i'_1 + u'_2 i'_2 = (u_1 + e_1) i'_1 + u_2 i_2 = e_1 i'_1 + u_1 \underbrace{(i_2 + j_1)}_{i'_1} + u_2 i_2 =$$

$$= e_1 i'_1 - u_2 i_2 - u_2 j_1 + u_2 i_2 = e_1 i'_1 + u_1 j_1 = P_{e_1} + P_{j_1} \quad (\text{c.b.d.o})$$

### Twierdzenie o wzajemności (odwracalności)

a) Rozpatrujemy parę obwodów rezystancyjnych, każdy z jednym źródłem napięcia.

Gałąź „1” (lub gałąź „2”) ze źródłem napięcia  $e$  oraz gałąź „2” (lub gałąź „1”) z badanym prądem  $i_2$  (prądem  $i_1$ ) traktujemy jako wyodrębnione z obwodu.



Zawsze możliwy jest taki wybór drzewa  $D$ , aby gałęzie 1,2 były strunami antydrzewa  $A = G - D$ .

Odpowiedź **obwodu 12**, badana metodą prądów strunowych:

$$R_p \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i_A = R_p^{-1} e_p, \quad i_1 = \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta_{11} e, \quad \Delta = \det R_p, \quad i_2 = \frac{1}{\Delta} \Delta_{21} e$$

Analogicznie, odpowiedź **obwodu 21**:

$$i'_A = R_p^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i'_1 = \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta_{12} e = i_2, \quad \text{bo } \Delta_{12} = \Delta_{21}$$

Tak więc, symetria macierzy  $R_p$ , identycznej dla obydwu obwodów skutkuje równością prądów  $i'_1$  oraz  $i_2$ .

Warto zastosować przekształcenie macierzy  $R_P/a \times a/$  w macierz

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}; \quad r_{21} = r_{12},$$

która wiąże bezpośrednio prądy  $i_1, i_2$  z napięciem źródłowym  $e$  (obwód 12):

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i_A = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}, \quad i_\alpha = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad i_\beta = \begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \\ \vdots \\ i_a \end{bmatrix},$$

podobnie wektor napięć źródłowych:

$$e_P = \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

oraz macierz  $R_P$  — na cztery odpowiednie bloki macierzowe:

$$R_P = \begin{bmatrix} r_\alpha & r_{\alpha\beta} \\ r_{\beta\alpha} & r_\beta \end{bmatrix}, \text{ otrzymujemy}$$

$$\begin{bmatrix} r_\alpha & r_{\alpha\beta} \\ R_{\beta\alpha} & r_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_{\beta\alpha} = r_{\alpha\beta}^T$$

Po eliminacji  $i_\beta$  (drugie równanie):

$$i_\beta = -r_\beta^{-1} r_{\beta\alpha} i_\alpha$$

i podstawieniu do pierwszego, otrzymujemy

$$(r_\alpha - r_{\alpha\beta} r_\beta^{-1} r_{\beta\alpha}^T) \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Poszukiwana macierz  $r / 2 \times 2/$  jest symetryczna, co łatwo sprawdzić, licząc

$$t^T = r_\alpha^T - r_{\alpha\beta} (r_\beta^{-1})^T r_{\beta\alpha}^T = r.$$

Korzyść wynikająca z redukcji stopnia (drugi zamiast  $a$ -tego) jest oczywista. Aby skonstruować  $r$  należy jednak odwrócić macierz  $r_\beta / (a - 2) \times (a - 2)/$ .

## Rezystancja zastępcza dwójnika

Opisaną metodą redukcji stopnia macierzy można wykorzystać również do obliczenia rezystancji zastępczej dwójnika o złożonej strukturze (obwód 12). Należy wyodrębnić element  $R_{11}$  macierzy  $R_P$  i potraktować go jako macierz jednoelementową,  $\bar{r}_\alpha = [R_{11}]$ .

Wówczas  $i_\alpha = [i_1] = i_1$ , a  $\bar{r}_\beta$  ma wymiary  $/a - 1/ \times /a - 1/$ .

Tak więc, rezystancja zastępcza dwójnika z końcówkami  $/1, 1'/$  wynosi:

$$R = R_{11} - \bar{r}_{1\beta} \bar{r}_\beta^{-1} \bar{r}_{1\beta}^T, \quad r_{1\beta} - 1 \text{ wiersz m. } R_P \text{ bez } R_{11} :$$

$$\bar{r}_{1\beta} = [R_{12}, R_{13}, \dots, R_{1a}]$$

Alternatywnie, rezystancja (konduktancja) zastępcza wynika wprost z zależności  $i_1(e)$ , zawartej w równaniu metody prądów strunowych:

$$R = \frac{e}{i_1(e)} = \frac{e}{\frac{1}{\Delta} \cdot \Delta_{11} e} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}},$$

$$G = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$$

gdzie

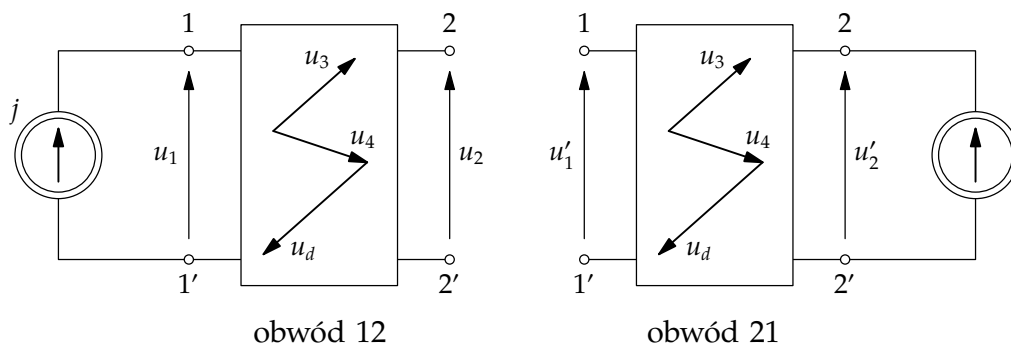
$$\Delta = \det T_P$$

$\Delta_{11}$  — dopełnienie algebraiczne elementu  $/1, 1'/$ .

Z koniecznością obliczenia wyznacznika stopnia  $a$  wiąże się większa uciążliwość tej metody w porównaniu z procedurą redukcji stopnia macierzy  $R_P$ .

## Sformułowania dualne

Zarówno stwierdzenie o wzajemności, jak techniki obliczania konduktancji (rezystancji) zastępczej mają swoje analogiczne (dualne) odpowiedniki, które opierają się na metodzie napięć konarowych.



$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} \quad u'_1 = u_2 \quad \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ j \end{bmatrix}$$

$$g = g_\alpha - g_{\alpha\beta} g_\beta^{-1} g_{\alpha\beta}^T = g^T$$

$$g \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix}$$

dwójnik:

$$G = \frac{j}{u_1(j)} = \frac{j}{\frac{1}{\Delta} \cdot \Delta_{11} j} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}, \quad \Delta = \det G_p$$

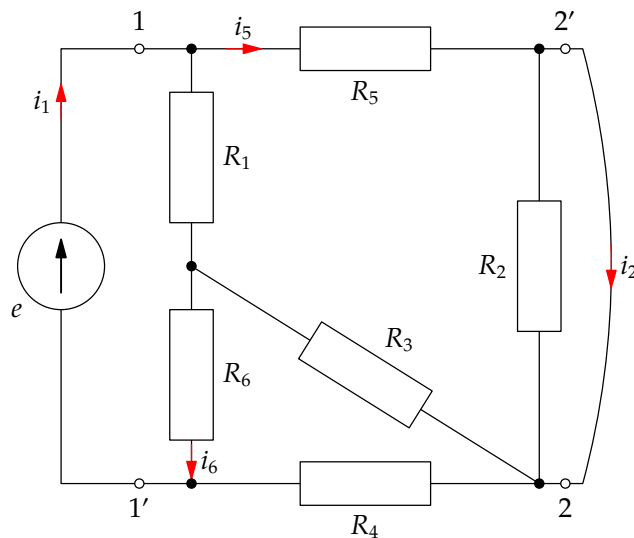
$$R = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$$

lub:

$$(G_{11} - \bar{g}_{1\beta} \bar{g}_\beta^{-1} \bar{g}_{1\beta}^T) u_1 = j$$

$$G = G_{11} - \bar{g}_{1\beta} \bar{g}_\beta^{-1} \bar{g}_{1\beta}^T$$

### Przykłady





$$K_1 = \{1, 3, 4, e\}, K_2 = \{R_2\}, K_5 = \{R_5, R_2, R_3, R_1\}, K_6 = \{R_6, R_4, R_3\}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & 0 & -(R_1 + R_3) & -(R_3 + R_4) \\ 0 & R_2 & -R_2 & 0 \\ -(R_1 + R_3) & -R_2 & R_5 + R_2 + R_3 + R_1 & R_3 \\ -(R_3 + R_4) & 0 & R_3 & R_6 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przyjmujemy  $R_k = k [\Omega]$

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 11 & 3 \\ -7 & 0 & 3 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \det r_\beta = 134 \quad r_\beta^{-1} = \frac{1}{134} \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} r &= r_\alpha - r_{\alpha\beta} r_\beta^{-1} r_{\alpha\beta}^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{134} \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{134} \begin{bmatrix} 915 & -146 \\ -146 & 52 \end{bmatrix} = \frac{1}{134} \begin{bmatrix} 157 & 146 \\ 146 & 216 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{134} \begin{bmatrix} 157 & 146 \\ 146 & 216 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

**dwójnik** /1, 1'/ ze zwartymi końcówkami 2, 2'

$$\begin{bmatrix} R_{11} & \bar{r}_{\alpha\beta} \\ \bar{r}_{\alpha\beta}^T & \bar{r}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 11 & 3 \\ -7 & 0 & 3 & 13 \end{bmatrix}'$$

$$\bar{r}_\beta^{-1} = \frac{1}{216} \begin{bmatrix} 134 & 26 & -6 \\ 26 & 26 & -6 \\ -6 & -6 & 18 \end{bmatrix} = \frac{1}{108} \begin{bmatrix} 67 & 13 & -3 \\ 13 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\bar{r}_{\alpha\beta} \bar{r}_\beta^{-1} r_{\alpha\beta}^T = [0 \quad 4 \quad 7] \bar{r}_\beta^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{488}{108} = \frac{122}{27}$$

$$R = R_{11} - \bar{r}_{\alpha\beta} \bar{r}_\beta^{-1} r_{\alpha\beta}^T = 8 - \frac{122}{27} = \frac{94}{27} = 3,48\Omega$$

### Praca kontrolna

Zastępując źródło napięcia  $e$  przez źródło prądu  $j$  i stosując metodę napięć konarowych, obliczyć napięcie źródła  $u_j$ , a następnie rezystancje dwójnika /1, 1'/, przy zwartych końcówkach 2 i 2'.